This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.
+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.
+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.
+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at http://books.google.com/

NYPL RESEARCH LIBRARIES
3 3433 06910083 6

OPUSCULA
STATICO-MECHANICA
PRINCIPIIS
ANALYSEOS FINITORUM
SUPERSTRUCTA

EDITORE

IOANNE PASQUICH

REGIAE SCIENTIARUM SOCIETATIS BOHEMICAE MEMBRO EXTRAORDINARIO; REGIAE SOCIETAT. SCIENT. GOTTINGENSIS A COMMERC. LITTERARUM SODALI; ET MATHESEOS SUBLIMIORIS IN REG. SCIENT. UNIVERSIT. HUNGAR. PROFESSORE EMERITO.

VOLUMEN II.

CUM FIGURIS.

ASTOR LIBRARY
NEW-YORK.

LIPSIAE
IN LIBRARIA WEIDMANNIANA
1799.

INDEX CONTENTORUM.

Introductio.

Complectens brevem expoſitionem naturae et discriminis quantorum commenſurabilium et incommenſurabilium.

Diſſertatio I.

De generalibus quibusdam corporum phyſicorum, viriumque in illa agentium proprietatibus.

Diſſertatio II.

De lege aequilibrii virium in rectas inflexiles directe agentium.

Diſſertatio III.

De viribus in rectas inflexiles oblique agentibus, earumque compoſitione et reſolutione.

Diſſertatio IV.

De Centro aequilibrii virium directionibus parallelis in datum ſyſtema plurium punctorum agentium.

Diſſertatio V.

De centro gravitatis in genere.

Diſſertatio VI.

De inveſtigatione centri gravitatis linearum et planorum gravium.

Diſſertatio VII.

De inveſtigatione centri gravitatis in corporibus, eorumque ſuperficiebus.

Diſſertatio VIII.

De motu punctorum aequabili uniformiterque accelerato et retardato.

Diſſertatio IX.

De determinatione motus progreſſivi datarum maſſarum per datas vires.

Diſſertatio X.

De lapſu corporum gravium per plana inclinata et lineas curvas.

Diſſertatio XI.

De momento inertiae.

Diſſertatio XII.

De motu maſſarum circa axes fixos.

Diſſertatio XIII.

De motu pendulorum, centroque oſcillationis.

INTRODUCTIO
COMPLECTENS BREVEM EXPOSITIONEM NATURAE ET DISCRIMINIS QUANTORUM COMMENSURABILIUM ET INCOMMENSURABILIUM.

1. Definitio.

Si quodcunque quantum g aliquoties, puta bis, ter, quater, aut pluries, ſumtum exaequet aliud quantum G; erit g pars *aliquota* quanti G, et G *multiplum* quanti G. Quantum e eſt *communis pars aliquota* duorum quantorum M, N, ſi e aequetur alicui parti aliquotae tam quanti M, quam quanti N, ſi e. gr. quantum e ſit pars 5*ta* quanti M, et pars 7*ma* quanti N.

2. Corollarium.

Pars aliquota x partis aliquotae X quanti Z eſt pars aliquota quanti Z. (1. §).

3. Definitio.

Quanta M, N erunt *commenſurabilia*, ſi ea communem habuerint aliquam partem aliquotam (1. §): quanta vero M, N dicentur *incommenſurabilia*, ſi nullam habeant communem partem aliquotam.

Scholion.

Ut nimirum duo quanta M, N poſſint dici commenſurabilia, ſufficit, ut conſtet, dari certum quantum e, quod ſit communis pars aliquota eorundem quantorum (1. §), dari idcirco aliquam partem aliquotam quanti M, quae aequetur certae parti aliquotae quanti N, licet fors non omnis pars aliquota quanti M ſit ſimul aliqua pars aliquota quanti N. Sic ſi eſſet M=7e, et N=5e, adeoque e pars 7*ma* quanti M, et pars 5*ta* quanti N; eſſet e communis pars aliquota quantorum M, N (1. §), quantaque haec eſſent commenſurabilia, licet non omnis pars aliquota quanti M ſit aliqua

pars aliquota quanti N, ut e. gr. pars 3*tia* $\frac{M}{3} = \frac{7e}{3}$ nulla poteſt eſſe pars aliquota quanti $N = 5e$; ſecus daretur numerus integer n, pro quo fieret $\frac{7e}{3} = \frac{5e}{n}$, hinc $n = \frac{15}{7}$, quod eſt impoſſibile. Verum, ut duo quanta M, N ſint incommenſurabilia, haud ſufficit, ut *certa* pars aliquota quanti M nulli parti aliquotae quanti N aequetur, aut ut *certum* quantum e nulla ſit communis pars aliquota quantorum M, N; ad id enim neceſſario requiritur, ut nullum abſolute ſit poſſibile quantum e aequale communi parti aliquotae quantorum M, N, ut idcirco nulla abſoluta pars aliquota quanti M, utcunque parva illa ſumatur, ſit ſimul aliqua pars aliquota quanti N. Haec de diſcrimine quantorum commenſurabilium et incommenſurabilium in gratiam tyronum dicta ſint, quorum multi doctrinam, quam hic paucis exponere conſtitui, aut penitus ignorabunt, aut minus, quam neceſſarium eſt, habebunt perſpectam.

4. Corollarium 1.

Si alterutrum duorum quantorum M, N, puta N, fuerit pars quaecunque aliquota alterius quanti M; erit quaevis pars aliquota quanti N aequalis alicui parti aliquotae quanti M (2. §), quantaque M, N erunt commenſurabilia (3. 1. §).

5. Corollarium 2.

Impoſſibile eſt, ut duo quanta M, N ſint commenſurabilia ſimul et incommenſurabilia (3. §): duo autem quanta homogenea M, N (e. gr. duo tempora, vel duae lineae, aut duae ſuperficies, etc.) ſemper erunt vel commenſurabilia, vel incommenſurabilia (3. §).

6. Corollarium 3.

Quoties duo quanta M, N fuerint commenſurabilia, toties vel erit ipſum quantum N aliqua pars *mta* quanti M, vel certa pars *nta* quanti N aequabitur alicui *mtae* parti quanti M (4. 3. §): extabit igitur numerus integer m, vel fractus $\frac{m}{n}$ aequalis exponenti rationis quanti M ad N, pro quo fiet $M = Nm$ vel $M = N\frac{m}{n}$. E. gr. ſi dicas, partem *5tam* quanti N aequari parti *8vae* quanti M, aut totum quantum N eſſe partem *8vam* quanti M, erit $M = N\frac{8}{5}$ caſu primo, et $M = N\,8$ caſu altero; conſequenter erit $\frac{8}{5}$, caſu primo, et 8, caſu altero, exponens rationis quanti M ad N.

7. Corol-

7. Corollarium 4.

Et viciſſim, ſi extet numerus integer m vel fractus $\frac{m}{n}$ aequalis exponenti rationis quanti M ad N, pro quo fiat $M = N m$ vel $M = N \frac{m}{n}$; erit N pars *mta* quanti M caſu primo, et pars *nta* quanti N aequabitur parti *mtae* quanti M caſu ſecundo (1. §): utroque caſu erunt ergo M, N quanta commenſurabilia (4. 3. §.).

8. Corollarium 5.

Quamobrem, ſi certo conſtet, duo quanta M, N eſſe incommenſurabilia, conſtabit eo ipſo, nullum eſſe numerum integrum vel fractum aſſignabilem, qui aequetur exponenti rationis quanti M ad N: ſecus enim quanta M, N, ex hypotheſi incommenſurabilia, eſſent ſimul commenſurabilia (7. §), contra (5. §)

9. Corollarium, 6.

Et viciſſim, undecunque conſtiterit, nullum eſſe numerum, nec integrum, neque fractum, aſſignabilem, qui aequetur exponenti rationis quanti M ad quantum homogeneum N, conſtabit eo ipſo, quanta M, N eſſe incommenſurabilia; ſecus deberent ea eſſe commenſurabilia (5. §), proinde aſſignabilis eſſet talis numerus (6. §), contra hypotheſin.

10. Theorema.

Pro quibuslibet duobus quantis $E > e$ *inaequalibus extat numerus integer* m, *pro quo eſſet* $E = e m$, *vel* $E > e m$ *et ſimul* $E < e(m+1)$.

Demonſtratio.

Cum minus quantum e inſtar unius partis quanti majoris E liceat ſpectare, poterit quantum E in partes aequales e, e, e, - - - e mente reſolvi, ita ut numerus m harum partium per magnitudinem quanti E ejusdemque partis e perfecte determinatus ſit, utque aut hae partes ſimul ſumtae exaequent quantum E, quo fiat $E = e m$, aut eae omnes una cum quapiam parte x, quae minor ſit parte e, totum E conſtituant, adeoque ſit $E = e m + x$, proinde $E > e m$, ſed ſimul $E < e(m+1)$.

11. Corollarium. 1.

Pro quovis quanto e utcunque parvo et alio homogeneo E utcunque magno extabit numerus integer r, pro quo *rtuplum* quanti e eſſet majus

quanto E, nimirum $e\,r > E$ (10. §.): igitur pars *rta* quanti E minor quanto e, nimirum $\frac{1}{r}E < e$.

12. Corollarium. 2.

Si quanta M, N ſunt incommenſurabilia, dari debet pars aliqua *nta* quanti N minor quanto M (11. §.), et pro quavis ejusmodi parte, utcunque magni denominatoris n, cum illa nulli parti aliquotae quanti M poſſit aequari (3. §.), cum idcirco M nullum poſſit eſſe multiplum ejusdem partis (1. §.), debet extare numerus integer m, pro quo fiat $M > N\frac{m}{n}$ et ſimul $M > N\frac{m+1}{n}$ (10. §.).

13. Corollarium. 3.

Ex his *rationalium irrationaliumque* rationum natura elucet. Ratio inter duo quanta M, N commenſurabilia eſt *rationalis*, ut et illius exponens, utpote aequalis determinato cuipiam nmuero integro vel fracto e, pro quo fit $M = Ne$ (6. §.). Ratio autem inter duo quanta, M, N incommenſurabilia eſt *irrationalis*; exponens illius e eſt *ſurdus* numerus ſeu *irrationalis*, nulli determinato numero, integro aut fracto, aequalis (8. §.) ſed unitati incommenſurabilis, ita ut is pro iisdem numeris m, n ſit $e > \frac{m}{n}$ et $e < \frac{m+1}{n}$, pro quibus eſt $M > N\frac{m}{n}$ et $M < N\frac{m+1}{n}$ (12. §.).

Scholion.

Exponens enim e ſupponitur per id ipſum, quod is ex unitate 1 complectitur, indicare, quantum in data ratione M : N ex quanto N in M continetur, ſeu quoties aut totum quantum N, aut certa pars aliquota quanti N ſumi debet, ut prodeat M: utprimum ergo eſt $M > N\frac{m}{n}$ et $M < N\frac{m+1}{n}$, quia id ipſum debet exponens e rationis M : N indicare; erit quoque $e > \frac{m}{n}$ et $e < \frac{m+1}{n}$, nimirum $e > 1.\frac{m}{n}$ et $e < 1.\frac{m+1}{n}$.

14. Definitio.

Menſuram alicujus quanti Q vocant quantum homogeneum q determinatae notaeque magnitudinis: quantum autem Q ope menſurae q *metiri* dicimur, dum rationem illius ad menſuram q inveſtigamus.

15. Coroll.

15. Corollarium, 1.

Dato exponente e rationis quanti Q ad ipſius menſuram q, cum eo ipſo ſit $Q = qe$, poterit poni $Q = e$ poſita menſura $q = 1$: nimirum omne quantum Q, ſpectata ejusdem magnitudine licebit per certum numerum e exprimere, qui videlicet aequetur exponenti rationis quanti Q ad quantum q pro ejusdem menſura aſſumtum (14. §.), modo hic numerus ad unitatem menſuram q denotantem relatus cogitetur.

Sic e. gr. in geometricis dimenſionibus, denotante q certum pedem cubicum, ſi numerus integer 4 vel fractus $\frac{4}{5}$ ſit exponens rationis dati Cylindri C ad eundem pedem cubicum q; poterit poni $C = 4$ caſu primo, et $C = \frac{4}{5}$ caſu ſecundo, modo hi numeri ad pedem cubicum q pro unitate aſſumtum relati cogitentur, quo fiat, ut $C = 4$ vel $C = \frac{4}{5}$ tantundem denotet, ac cylindrum C aequari quatuor pedibus cubicis q, vel quatuor 5*tis* unius pedis cubici q.

Scholion.

Hoc ſenſu omnis numerus concretus exprimit aliquod quantum, pro cujus menſura ſumta eſt unitas, ad quam is numerus refertur; idemque numerus, inſtar abſtracti ſpectatus, dat exponentem rationis quanti per illum numerum expreſſi ad quantum pro ejus menſura aſſumtum. Sic e. gr. 8 horae exprimunt certum tempus, pro cujus menſura una hora eſt ſumta, ita ut 8 ſit exponens rationis ejusdem temporis ad aſſumtam menſuram.

16. Corollarium. 2.

Hoc tamen modo (15. §.) tunc ſolum licebit datum quantum Q per certum numerum accurate exprimere, ſi illud ſit aſſumtae menſurae q commenſurabile: dum enim Q fuerit incommenſurabile menſurae q; nullus erit aſſignabilis numerus e, pro quo poſſit poni $Q = qe$, adeoque $Q = e$ pro $q = 1$ (13. §.).

17. Corollarium. 3.

Semper autem, dum datum quantum Q incommenſurabile fuerit aſſumtae menſurae q, poterit accipi aliqua *nta* pars menſurae q minor quanto Q, et pro illa determinari numerus integer m, qui det $Q > q\frac{m}{n}$ et $Q < q\frac{m+1}{n} = q\frac{m}{n} + \frac{q}{n}$ (12. §.): hac ergo ratione poterimus adproximare ad quantum $q\frac{m}{n} = \frac{m}{n}$ pro $q = 1$, cujus differentia a dato quanto

erit

erit minor parte *nta* $\frac{q}{n}$ menſurae q, quod idcirco in praxi, ubi minutiae ſolent negligi, quanto Q poterit ſubſtitui, ſi numerus n adeo magnus ſit, ut pars *nta* menſurae q citra notabilem errorem poſſit negligi.

Scholion.

Ponamus dari triangulum rectangulum, quod habeat hypothenuſam h, et cathetos aequales q, q; erit $h^2 = q^2 + q^2 = 2q^2$, hinc $h = q\sqrt{2}$. Exponens rationis hypothenuſae h ad cathetum q eſt $\sqrt{2}$, nulli idcirco numero aſſignabili, nec integro neque fracto, aequalis; hypothenuſa h eſt incommenſurabilis catheto q; ſumta catheto $q = 1$ pro menſura hypothenuſae, poterit quidem poni $h = \sqrt{2}$, ſed h nullo numero aſſignabili poterit exacte exprimi. Interea licebit adproximare ad rectam qe, cujus differentia ab hypothenuſa h minor ſit data quacunque parte decimali $q . \frac{1}{100 \ldots 0}$ ipſius catheti q, ſi nimirum extractione radicis $\sqrt{2}$ adproximetur ad numerum e, cujus differentia a radice $\sqrt{2}$ minor ſit parte decimali $\frac{1}{100 \ldots 0}$ unitatis.

18. Corollarium 4.

Interea etiam eo caſu, quo quantum Q fuerit incommenſurabile aſſumtae menſurae q, quo caſu idcirco pro quovis numero integro n alter m extiterit, qui det $Q > q\frac{m}{n}$ et $Q < q\frac{m+1}{n}$ (12. §.), licebit ponere $Q = qe$, hinc $Q = e$ pro $q = 1$, modo per e intelligatur numerus ſurdus ſemper major fractione $\frac{m}{n}$ et minor fractione $\frac{m+1}{n}$ (13. §.), ad quem per (17. §.) adproximare liceat.

Scholion.

Expreſſiones hae, utriusque generis, quantorum per numeros (15. 18. §.) ampliſſimum habent uſum in univerſa matheſi adplicata, ipſaeque adproximationes in (17. §.) expoſitae utiliſſime adhibentur, ubi ſumma accuratio nec poſſibilis eſt, neque neceſſaria. Verum ubi de demonſtrandis quantorum relationibus agitur, ne certitudo evidentiaque mathematica patitur, ſummo rigore opus eſt, eoque ipſo ab incommenſurabilitate quantorum nunquam licet praeſcindere, et ea, quae de quantis pro commenſurabilibus ſumtis demonſtrata habentur, ad quanta generatim ſumta extendere: quoties idcirco relatio aliqua duorum aut plurium quantorum in ſequentibus demon-

demonſtranda fuerit, quanta ejusmodi in utroque ſtatu conſiderabimus, quo evidenter appareat, utrum talis relatio de iis ſemper, ſeu illa ſint commenſurabilia, ſeu incommenſurabilia, poſſit praedicari, atque in hunc finem ſubjungam criteria, tam aequalitatis duorum quantorum uni tertio incommenſurabilium, quam proportionalitatis quatuor quantorum talis indolis.

19. DEFINITIO.

Quantum aliquod g bis, ter, quater, et generatim *ries contineri* dicetur in dato quanto G, ſi quantum g *ries* ſumtum exaequet aut totum quantum G, aut unam partem quanti G, ita ut pars altera quanti G minor ſit quanto g.

E. gr. Numerus 4 ter continetur tam in 12, quam in 15, quia numerus 4 ter ſumtus exaequat totum numerum 12, et unam partem numeri 15, ita ut pars altera 3 hujus numeri minor ſit numero 4.

20. Theorema.

Si dentur duo quanta inaequalia $U > u$, *eademque comparentur cum quanto tertio homogeneo* V; *poſſibilis debebit eſſe pars aliquota quanti* V, *quae in quanto majore* U *pluries contineatur, quam in minore* u.

Demonſtratio.

Quidquid ſint quanta U, u, V, debet neceſſario extare pars aliquota quanti V, quae minor ſit ſingulis quantis U, u, eorundemque differentia $U-u=D$ (11. §.), quae idcirco, ſi non pluries, ſemel tamen contineatur in u, et ſemel in D (19. §.), adeoque pluries in $U=u+D$ quam in u.

21. Theorema.

Duo quanta Z, X *uni tertio* z *incommenſurabilia erunt neceſſario inter ſe aequalia, ſi pro quovis utcunque magno numero integro* n *extet alter numerus integer* m, *quo fiat tam* $Z > z\frac{m}{n}$ et $Z < z\frac{m+1}{n}$, *quam* $X > z\frac{m}{n}$ *et* $X < z\frac{m+1}{n}$.

Demonſtratio.

Pro qualibet *nta* parte quanti z dari numerum integrum m, pro quo ſit tam $Z > z\frac{m}{n}$ et $Z < z\frac{m+1}{n}$, quam $X > z\frac{m}{n}$ et $X < z\frac{m+1}{n}$ tantundem ſignificat, ac quamlibet partem aliquotam quanti z in quovis quantorum Z, X toties contineri, quoties ea continetur in altero (19. §.): in aſſumta

hypo-

hypotheſi eſt ergo impoſſibilis pars aliquota quanti z, quae in alterutro quantorum Z, X pluries quam in altero contineatur, unde neceſſario ſequitur, quanta Z, X, cum nequeant eſſe inaequalia (20. §.), eſſe inter ſe aequalia.

22. Theorema.

Si, datis quatuor quantis M, N, P, Q, *pro quolibet utcunque magno numero integro* n *alter numerus integer* m *fuerit poſſibilis, qui det tam* $M > N\frac{m}{n}$ *et* $M < N\frac{m+1}{n}$, *quam* $P > Q\frac{m}{n}$ *et* $P < Q\frac{m+1}{n}$ (12. §.), *erit ratio quanti* M *ad* N *aequalis rationi quanti* P *ad* Q, *ſeu erit* M:N=P:Q.

Demonſtratio.

Si enim quantum x ſit homogeneum quanto Q et petatur ratio quanti x ad Q, aequalis rationi quanti M ad N, quo fiat M:N=x:Q; neceſſe eſt, ut tantundem contineat x ex Q, quantum continet M ex N: pro iisdem ergo numeris integris m, n, pro quibus fuerit $M > N\frac{m}{n}$ et $M < N\frac{m+1}{n}$, debebit etiam eſſe $x > Q\frac{m}{n}$ et $x < Q\frac{m+1}{n}$. Quare, cum per hypotheſin ſit $P > Q\frac{m}{n}$ et $P < Q\frac{m+1}{n}$; erit neceſſario x=P (21. §.), conſequenter M:N=P:Q.

DISSER-

DISSERTATIONES
AD
STATICAM CORPORUM SOLIDORUM PERTINENTES.

DISSERTATIO I.

DE GENERALIBUS QUIBUSDAM CORPORUM PHYSICORUM, VIRIUMQUE IN ILLA AGENTIUM PROPRIETATIBUS.

23. Definitio.

Tria in omni corpore phyſico merentur notari: *Volumen*, ſeu pars ſpatii, quam totum corpus occupat: *Maſſa*, ſeu quantitas materiae ſub eodem volumine contentae: *Pori* denique, ſeu interstitia omni materia, ad maſſam corporis pertinente, vacua et per totum volumen, teſte experientia, diſſeminata.

24. Corollarium 1.

Inventio voluminis dati cujuscunque corporis phyſici ab iisdem pendet principiis, quibus determinatio ſoliditatis corporum geometricorum nititur (23. §.).

E. gr. Volumen cylindri plumbei aequabitur producto ex area baſeos in altitudinem cylindri; volumen coni lignei erit aequale uni tertiae producti ex area baſeos in altitudinem coni, et ſic porro.

25. Corollarium 2.

Utcunque autem dati alicujus corporis volumen notum fuerit, poterit ejusdem maſſa penitus ignorari (23. §.). Cum enim partem unam voluminis maſſa expleat, partem vero alteram pori occupent; niſi ſpatium innoteſcat, quod omnes pori dati corporis ſimul ſumti occupant, impoſſibile erit ſpatium noſcere, quod ejus maſſa explet.

26. Corollarium 3.

Interea facile ex (23. §.) elucet, maſſam cujuslibet corporis eo *denſiorem* futuram, quo minor fuerit pars dati voluminis, quam omnes pori occupant, quo magis idcirco particulae materiales maſſam corporis conſtituentes ſtipatae, ſeu quo viciniores illae inter ſe fuerint, ita ut generatim, quaelibet maſſa eo denſior futura ſit, quo major fuerit illius quantitas ſub determinato volumine.

27. Definitio.

Quamobrem, ſi maſſa per certum volumen ſic ſit diffuſa, ut quaevis partes aequales ejusdem voluminis, utcunque magnae aut parvae, eandem maſſae quantitatem complectantur, eadem erit in omnibus voluminis partibus maſſae denſitas, ipſaque maſſa vocabitur *aequabiliter denſa:* corpora autem aequabiliter denſa vocabuntur, quorum maſſae (23. §.) aequabiliter denſae fuerint. Generatim autem duo corpora, quorum maſſae ejusdem vel diverſae ſpeciei materia conſtiterint, ut e. gr. duo globi aurei, vel duo globi, quarum unus ſit plumbeus, et alter aureus; erunt *homogenea* caſu primo, et *heterogenea* caſu ſecundo. Hinc intelligitur, quid ſignificet, corpus aliquod C eſſe *homogeneum*: quoties nimirum omnes, magnae et parvae partes corporis C ejusdem ſpeciei maſſa conſtiterint; dicetur C eſſe corpus *homogeneum.*

28. Corollarium 1.

Si corpus C voluminis V ſit aequabiliter denſum, ſumaturque aliqua pars c ejusdem corporis, cujus volumen aequetur parti dimidiae, aut 3*tiae*, vel 4*tae*, aut generatim parti n*tae* totius voluminis V; debebit quoque maſſa partis c aequari uni n*tae* parti maſſae totius corporis C (27. §.)

29. Corollarium 2.

Quare, ſumta alia parte q corporis aequabiliter denſi C; cujus volumen ſit r*tuplum* voluminis partis p; erit etiam maſſa partis q r*tupla* maſſae partis p (28. §.): quaevis idcirco pars q corporis aequabiliter denſi C, cujus volumen fuerit r*tuplum* unius n*tae* partis voluminis V totius corporis C, habebit quoque maſſam r*tuplam* unius n*tae* partis maſſae totius corporis C (28. §.).

30. Corollarium 3.

Si duo corpora aequabiliter denſa ſub eodem volumine inaequales maſſas complectantur, ita ut maſſa unius corporis aut totam maſſam alterius

ries

ries ſumtam, aut unam ntam partem hujus maſſae ries acceptam exaequet; debebit etiam denſitas prioris corporis aut totam denſitatem, aut unam ntam partem denſitatis poſterioris corporis ries ſumtam exaequare (27. 26. §.).

31. Corollarium 4.

Quodſi autem duo corpora L, l aequabiliter denſa ſub inaequalibus voluminibus K, k eandem maſſae quantitatem complectantur; erit maſſa corporis l, cujus volumen k minus eſt, denſior quam maſſa corporis L, cujus volumen K eſt majus. In hac videlicet hypotheſi continebit pars corporis L, cujus volumen exaequat volumen k corporis l, minus maſſae, quam corpus l ſub volumine k complectitur (27. §.); conſequenter erit denſitas maſſae in illa parte corporis L minor denſitate maſſae corporis l (26. §.), eoque ipſo erit quoque denſitas maſſae totius corporis L minor denſitate maſſae corporis l (27. §.).

32. Corollarium 5.

Ponamus, corpora L, l aequabiliter denſa ſub inaequalibus voluminibus K, k eandem maſſae quantitatem μ complecti, eſſeque $k = K\frac{1}{n}$, vel $k = K\frac{r}{n}$, nimirum volumen minus corporis l aequale aut uni ntae parti majoris voluminis K corporis L, aut rtuplo unius ntae partis voluminis K; debebit reciproce denſitas corporis L aequari aut uni ntae parti denſitatis corporis l, aut rtuplo unius ntae partis hujus denſitatis. Nam pars x corporis L, cujus volumen ſit $= K\frac{1}{n}$ vel $= K\frac{r}{n}$, habebit maſſam pariter $= \mu\frac{1}{n}$ vel $= \mu\frac{r}{n}$ (28. 29. §.): igitur erit denſitas partis x corporis L, eadem cum denſitate totius corporis L (27. §.), vel $= \frac{1}{n}$ vel $= \frac{r}{n}$ denſitatis corporis l (30. §.).

33. Corollarium 6.

Corpora homogenea et aequabiliter denſa, omnesque illorum partes, utcunque magnae vel parvae, eandem habent maſſarum denſitatem (27. §.).

34. Theorema.

Denſitates D, d duorum corporum aequabiliter denſorum, maſſas inaequales M, m ſub eodem volumine continentium, ſunt in ratione directa maſſarum, ſeu eſt $D:d = M:m$.

 Demon-

Demonſtratio.

Maſſae M, m vel ſunt commenſurabiles, vel incommenſurabiles (3. §.). Primo caſu neceſſario extabit numerus integer r vel fractus $\frac{r}{n}$, pro quo ſit $M = mr$ vel $M = m\frac{r}{n}$ (6. §.): igitur erit etiam $D = dr$, vel $D = d\frac{r}{n}$ (30. §.), hinc utroque caſu $D : d = M : m$.

Sint jam maſſae M, m incommenſurabiles; neceſſe eſt, ut pro quolibet utcunque magno numero integro n extet alter numerus integer r, pro quo fiat $M > m\frac{r}{n}$ et $M < m\frac{r+1}{n}$ (12. §.). Quare, cum pro $M = m\frac{r}{n}$ vel $M = m\frac{r+1}{n}$ neceſſario fieret $D = d\frac{r}{n}$ vel $D = d\frac{r+1}{n}$ (30. §.), debebit eſſe pro iisdem numeris $D > d\frac{r}{n}$ et $D < d\frac{r+1}{n}$ (26. §.), hinc $D : d = M : m$ (22. §.).

35. Theorema.

Denſitates D, d *duorum corporum aequabiliter denſorum, eandem maſſae quantitatem ſub diverſis voluminibus* V, v *continentium, ſunt in ratione inverſa voluminum, ſeu eſt* $D : d = v : V$.

Demonſtratio.

Volumina V, v commenſurabilia poſſunt eſſe, vel incommenſurabilia (3. §.). Caſu primo dabitur certus numerus integer n vel fractus $\frac{n}{r}$, pro quo ſit $V = vn$ vel $V = v\frac{n}{r}$ (6. §.), quo fiat $v = V\frac{1}{n}$ vel $v = V\frac{r}{n}$: conſequenter erit reciproce $D = d\frac{1}{n}$ vel $D = d\frac{r}{n}$ (32. §.), et ideo utroque caſu $D : d = v : V$.

Quodſi vero volumina V, v ſint incommenſurabilia debebit, pro quolibet, utcunque magno, numero integro n extare alter numerus integer r, quo fiat $V > v\frac{r}{n}$ et $V < v\frac{r+1}{n}$ (12. §.): cum igitur pro $V = v\frac{r}{n}$ vel $V = v\frac{r+1}{n}$ deberet eſſe reciproce $d = D\frac{r}{n}$ vel $d = D\frac{r+1}{n}$ (32 §.), erit re ipſa $d > D\frac{r}{n}$ et $d < D\frac{r+1}{n}$ (31. §.), hinc $d : D = V : v$ per (22. §.).

36. Co-

36. Corollarium 1.

Denſitates D, d duorum corporum aequabiliter denſorum, inaequales maſſas M, m ſub inaequalibus voluminibus V, v continentium, ſunt inter ſe in ratione compoſita ex directa ratione maſſarum, et inverſa voluminum, ſeu eſt $D:d=Mv:mV$. Si enim cogitetur tertium corpus aequabiliter denſum, cujus denſitas ſit δ, maſſa M, et volumen v; erit

$$D:\delta=v:V \text{ per (35. §.)};$$

$$\delta:d=M:m \text{ per (34. §.)}:$$

igitur multiplicando

$$D\delta:\delta d=vM:Vm, \text{ ſeu } D:d=vM:Vm.$$

37. Corollarium 2.

Pro corporibus homogeneis aequabiliterque denſis erit per (33. §.) in (36. §) $D=d$, hinc $vM=Vm$, et $M:m=V:v$, nimirum: maſſae duorum corporum homogeneorum et aequabiliter denſorum ſunt inter ſe in ratione directa voluminum.

38. Definitio.

Corpus, quod aut conſtanter in eodem loco manet, aut locum continuo mutat, dicitur *quieſcere* caſu primo, et *moveri* caſu altero: quidquid autem aut actu aliquem motum producit, aut eum producere nititur, ita ut is ſublatis impedimentis neceſſario debeat ſequi, ei *Vim motricem* velut motus cauſam tribuimus.

39. Definitio.

Omne corpus, teſte experientia, ita eſt comparatum, ut illud perpetuo deorſum urgeatur actuque labatur, niſi quid lapſum impediat: vis, quae omnia corpora circa terrae ſuperficiem deorſum urget, vocatur *Gravitas* ſeu *Vis gravitatis*.

40. Corollarium 1.

Omne corpus, quantumlibet parvum id ſit vel magnum, eſt grave (39. §.).

41. Corollarium 2.

Utrum minimae omnium corporum phyſicorum particulae *aeque graves* ſint (40. §.), ſingulae nimirum pari efficacia a vi gravitatis deorſum urgeantur (39. §.), nondum hic poteſt definiri: aſſumemus id interea inſtar hypo-

hypotheſeos, quae, prouti deinceps videbimus, cum experimentis ſumma diligentia inſtitutis, calculisque legitime ſuperſtructis quam optime conſentit.

Scholion.

Haec tamen de quavis terrae regione ſeorſim ſumta debent intelligi. Sicut enim ex variis obſervationibus exprimentisque in certa regione, quaecunque ea ſit, inſtitutis clare videtur ſequi, eandem eſſe efficaciam vis gravitatis in minimas omnium corporum ejus regionis particulas; ſic ex aliis obſervationibus et experimentis aeque clare ſequitur, efficaciam vis gravitatis in minimas corporum particulas diverſam eſſe in diverſis terrae regionibus.

42. Definitio.

Perpetua experientia docet, minima omnium corporum libere (nimirum ob ſolam vim gravitatis, quin aliud aliquid in motum ab ejus actione pendentem quaqua ratione influat) labentium percurrere rectas inter ſe ad ſenſum parallelas, atque ad ſuperficiem aquae ſtagnantis perpendiculares; ob hanc cauſam vocari ſolent ejusmodi rectae jam *Lineae verticales*, jam *gravitatis Directiones*.

43. Corollarium.

Filum tenue, e cujus uno extremo globulus plumbeus, aut aliud aliquod grave corpusculum libere pendeat, exhibebit, quieſcente hoc corpuſculo, directionem gravitatis (42. §.).

44. Definitio.

Planum verticale eſt, quod talem habet ſitum, ut impoſſibile ſit, ex aliquo ejus puncto lineam verticalem demittere (42. §.), quin illa tota in eodem plano, producto ſi opus eſt, jaceat. *Horizontalem* autem *lineam* vocant, ad quam linea verticalis (42. §.) eſt perpendicularis: et *planum horizontale* dicitur, ad quod linea verticalis eſt perpendicularis, ita ut illa cum plano, ex omni parte, angulos rectos comprehendat.

45. Definitio.

Pondus abſolutum cujuslibet corporis, ſeu ſimpliciter *Pondus* eſt tota preſſio, quam vis gravitatis in illo producit (39. §.).

Scholion.

Pondus corporis diſtingui debet a vi gravitatis in corpus agente, velut effectus a ſua cauſa. Si e. gr. globum plumbeum G manu ſuſtineas, manum

certa

certa efficacia deorſum premi experieris: nimirum globus G a vi gravitatis deorſum premitur, et iſtam preſſionem, quam vis gravitatis ut cauſa effectum (38. 39. §.) in globo G producit, is neceſſario perſentiscit, qui globum G manu ſuſtinet; eandem vero preſſionem nomine *ponderis* globi G ſolemus intelligere.

46. Corollarium 1.

Cum quaelibet particula dati corporis C a vi gravitatis deorſum urgeatur (39. 40. §.); debebit pondus corporis C aequari ſummae preſſionum, quas ſingulae particulae materiales ejusdem corporis ob vim gravitatis perſentiſcunt (45. §.).

47. Corollarium 2.

Quare, cum minimae particulae omnium corporum pari efficacia a vi gravitatis premantur (41. §.), ſic pendebunt pondera P, p duorum corporum ab illorum maſſis M, m, ut pondus P debitum maſſae M futurum ſit aequale ponderi p, vel majus aut minus pondere p debito maſſae m, prout fuerit maſſa M aequalis maſſae m, vel major aut minor maſſa m (46. §.).

48. Corollarium 3.

In ſpecie vero, ſi maſſa alicujus corporis A fuerit *rtupla* maſſae alterius corporis B, vel *rtupla* unius n*tae* partis maſſae corporis B; debebit etiam pondus corporis A eſſe *rtuplum* ponderis corporis B caſu primo, vel *rtuplum* unius n*tae* partis ponderis corporis B caſu ſecundo (46. 47. §.).

49. Theorema.

Pondera P, p *quorumvis duorum corporum maſſas* M, m *habentium ſunt his maſſis proportionalia ſeu eſt* P:p=M:m.

Demonſtratio.

Maſſae M, m commenſurabiles ſunt, aut incommenſurabiles (3. §.). Pro maſſis M, m commenſurabilibus debet dari numerus integer r vel fractus $\frac{r}{n}$, pro quo ſit M=mr vel $M=m\frac{r}{n}$ (6. §.): igitur etiam P=pr vel $P=p\frac{r}{n}$ (48. §.), adeoque utroque caſu P:p=M:m.

Si vero maſſae M, m ſint incommenſurabiles, debebit pro quolibet utcunque magno numero integro n extare alter numerus integer r, qui

 det

det $M > m\frac{r}{n}$ et $M < m\frac{r+1}{n}$ (12. §.): quare, cum pro $M = m\frac{r}{n}$ vel $M = m\frac{r+1}{n}$ deberet fieri $P = p\frac{r}{n}$ vel $P = p\frac{r+1}{n}$ (48. §.); erit re ipſa $P > p\frac{r}{n}$ et $P < p\frac{r+1}{n}$ (47. §.), et ideo $P:p = M:m$ (22. §.).

50. Corollarium 1.

Si duo corpora aequabiliter denſa habeant volumina V, v, maſſas M, m, pondera P, p, et denſitates D, d; erit $D:d = Mv:mV$ (36. §.), et $M:m = P:p$ (49. §.): igitur $D:d = Pv:pV$, nimirum: *denſitates duorum corporum aequabiliter denſorum ſunt in ratione compoſita ex ratione directa ponderum et inverſa voluminum.*

51. Corollarium 2.

Semper autem, dum duo corpora fuerint homogenea et aequabiliter denſa (27. §.), erunt illorum pondera inter ſe in ratione directa voluminum, nimirum: $P:p = M:m$ (49. §.) et $V:v = M:m$ (37. §.), hinc $P:p = V:v$.

52. Corollarium 3.

Quodlibet corpus determinati ponderis p habet maſſam m perfecte determinatam, ita ut nullum aliud corpus ejusdem ponderis p plus vel minus, quam m, maſſae poſſit habere (47. §.); quamobrem, ſumto certo pondere p pro menſura omnium ponderum, ſumtaque maſſa m ei debita pro menſura omnium maſſarum (14. §.), facile omnes corporum maſſae per eorum pondera, et haec per illas aeſtimabuntur. Cum enim ſit $\frac{P}{p} = \frac{M}{m}$ (49. §.); patet, exponentem rationis geometricae cujuslibet ponderis P ad aſſumtam illius menſuram p aequalem futurum exponenti rationis maſſae M debitae illi ponderi ad ejusdem maſſae menſuram m: quodſi ergo per M intelligatur, non maſſa corporis pondus P habentis, ſed exponens rationis hujus maſſae ad aſſumtam menſuram m, licebit ponere pondus $P = M$, exponente M relato ad unitatem $= p$; et ſi per P, non pondus corporis habentis maſſam m, ſed exponens rationis hujus ponderis ad aſſumtam menſuram p intelligatur, poterit poni ipſa maſſa $M = P$, exponente P relato ad unitatem $= p$ (15. 18. §.).

Scho-

Scholion.

Hoc ſenſu in ſequentibus maſſae corporum determinabuntur per ipſorum pondera, et pondera per maſſas, ea nimirum ratione, qua in diſquiſitionibus geometricis arcus per angulos, et hi per illos ſolent determinari. Si e. gr. pondus p unius librae pro menſura omnium ponderum, et maſſa m corporis, cujus pondus uni librae aequatur, pro menſura omnium maſſarum ſumatur, tum detur alicujus corporis C maſſa $M=8$ id eſt 8*pla* maſſae m; dicetur illius pondus eſſe $P=8$, nimirum 8*plum* ponderis p unius librae, adeoque 8 librarum: dato vero pondere $P=\frac{3}{8}$ id eſt aequale 3 8*vis* unius librae; erit ejus maſſa $M=\frac{3}{8}$, nimirum aequalis 3 8*vis* maſſae m. Ceterum notent ſibi tyrones, ſaepenumero ipſa corpora gravia nomine ponderum intelligi; ſic e. gr. ubi in ſequentibus de ponderibus quibusdam A, B, C e datis punctis pendentibus ſermo fuerit, re ipſa nomine ponderum debebunt intelligi corpora, quorum pondera ſint A, B, C.

53. Definitio.

Quaevis maſſa aequabiliter denſa ſic eſt conformata, ut ea ſub quibuslibet voluminibus aequalibus det pondera aequalia (27. 47. §.), quo ſit, ut ſi pondus talis maſſae ſub certo volumine noſcatur, eo ipſo etiam illius pondus ſub dato quovis alio volumine poſſit determinari (51. §.). Ob hanc cauſam quaevis maſſa aequabiliter denſa ſub determinato quopiam volumine v, e. gr. volumine unius digiti, vel pedis cubici, ſolet conſiderari: pondus vero maſſae ſub tali volumine vocatur ejus *Gravitas reſpectiva*, aut *ſpecifica*, ſeu *Pondus reſpectivum*, nimirum reſtrictum ad determinatum volumen v. Maſſa aequabiliter denſa certae ſpeciei (e. gr. aurum) determinatum habet pondus ſub determinato volumine v, diſtinctum ab illo pondere, quod alterius ſpeciei maſſa (e. gr. argentum) ſub eodem habet volumine, unde ratio denominationis gravitatis *ſpecificae* elucet.

54. Corollarium 1.

Si P ſit pondus maſſae aequabiliter denſae ſub volumine V, et G illius gravitas ſpecifica reſtricta ad volumen v; erit $P:G=V:v$ (53. 51. §.)

55. Corollarium 2.

Ex (54. §.) ſequitur $P=G\frac{V}{v}$, hinc $P=GV$ pro $v=1$, quo fiat, ut V exprimat exponentem rationis voluminis, ſub quo pondus P continetur,

 ad

ad volumen v. Si ergo cognita gravitate ſpecifica G maſſae alicujus corporis C petatur pondus P hujus corporis; ſumatur volumen v, ad quod gravitas ſpecifica ſit reſtricta (53. §.) pro menſura voluminis V ejusdem corporis, tum, determinato exponente rationis ejusdem voluminis V ad menſuram v (14. 15. 18. §.), ducatur in illam gravitas ſpecifica G.

E. gr. Petatur pondus P cylindri ferrei, cujus radius baſeos ſit $r = 6$ digitis, et altitudo $a = 2$ pedibus, data gravitate ſpecifica ferri $G = 558$ ℔, quae pondus unius pedis cubici ferri exprimat. Si V denotet volumen cylindri, pro cujus menſura ſumatur pes cubicus; erit, denotante π ſemiperipheriam circuli radio $= 1$ deſcripti,

$$V = a\pi r^2 = 2 \cdot 3,141 \cdot \tfrac{1}{4} = 1,57 \text{ ped. cub.}$$
$$P = GV = 558 \cdot 1,57 = 876,06 \text{ ℔}.$$

56. Corollarium 3.

Volumen autem erit $V = v\dfrac{P}{G}$ (54. §.), ſeu $V = \dfrac{P}{G}$ pro $v = 1$. Dato itaque pondere P, dataque gravitate ſpecifica G maſſae alicujus corporis C, invenietur volumen V ejusdem corporis, ſi pondus P dividatur per gravitatem ſpecificam G, tum per quotum relatum ad unitatem $= v$ exprimatur volumen V (15. 18. §.).

E. gr. Si $P = 876,06$ ℔ ſit pondus cylindri ferrei, et $G = 558$ ℔ gravitas ſpecifica ferri aequalis ponderi ferri in uno pede cubico $= v$; erit volumen ejusdem cylindri

$$V = \frac{876,06 \text{ ℔}}{558 \text{ ℔}} = 1,57 \text{ ped. cub.}$$

57. Corollarium 4.

Et ipſa gravitas ſpecifica erit $G = P \cdot \dfrac{v}{V}$ (54. §.), ſeu $G = P : \dfrac{V}{v} = \dfrac{P}{V}$ pro $v = 1$. Quare, dato pondere certi corporis invenietur gravitas ſpecifica G illius maſſae, ſi volumen v, ad quod gravitas ſpecifica G debet reſtringi (53. §.), ſumatur pro menſura voluminis V, tum invento exponente rationis hujus voluminis ad menſuram v (14. 15. 18. §.), dividatur per illum pondus P.

E. gr. Si, dato pondere $P = 876,06$ ℔ cylindri ferrei, quaeratur gravitas ſpecifica G ferri, quae exprimat pondus ferri in uno pede cubico $= v$;

quaeratur volumen V = 1,57 ped. cub. ejusdem cylindri, tum per 1,57 dividatur P: erit enim

$$G = \frac{876,06 \text{ ℔}}{1,57} = 558 \text{ ℔}.$$

58. Corollarium 5.

Si gravitates ſpecificae G, g duarum maſſarum aequabiliter denſarum ad idem volumen v reſtringantur, adeoque denotent pondera talium maſſarum ſub eodem determinato volumine v contentarum (53. §.), denſitates vero earundem maſſarum ſint D, d; erit D, d = G; g (50. §.).

59. Corollarium 6.

Hac ratione, aſſumta denſitate d certae maſſae aequabiliter denſae pro unitate ſeu menſura denſitatum omnium maſſarum aequabiliter denſarum, cognitaque gravitate ſpecifica g illius maſſae, facile innoteſcit denſitas D cujuslibet alterius maſſae, data ejus gravitate ſpecifica G ad idem volumen reſtricta, ad quod gravitas ſpecifica g relata ſit: erit nimirum $D = d\frac{G}{g}$ (58. §.), hinc $D = \frac{G}{g}$ pro $d = 1$, aut etiam $D = G$ pro $g = 1$, id eſt, exponens rationis gravitatis ſpecificae G maſſae M ad gravitatem ſpecificam g maſſae m, relatus ad unitatem aequalem denſitati d hujus maſſae exprimet denſitatem D maſſae M (15. 18. §.).

E. gr. Si denſitas d aquae ſumatur pro menſura denſitatum reliquarum maſſarum, ſciaturque exponens = 14 gravitatis ſpecificae mercurii ad gravitatem ſpecificam aquae; erit denſitas mercurii D = 14, hoc numero ad unitatem = d relato, quo fiat, ut D = 14 tantundem denotet, ac D = d 14, adeoque ſignificet, denſitatem mercurii eſſe 14*plam* denſitatis aquae.

Scholion.

Veri ſimillimum quidem eſt, nullas in natura maſſas extare, quae ſint aequabiliter denſae, unde ſequi videtur, ea, quae hactenus de talibus maſſis ſunt demonſtrata, ad corpora, qualia in natura re ipſa occurrunt, non poſſe applicari. Verum conſtat quoque, dari maſſas, quae ad aequabiliter denſas proxime accedunt, ita ut ad ſenſum pro talibus poſſint haberi. Si e. gr. pondera duorum aut plurium plumbeorum globorum ejusdem diametri ope exquiſitiſſimae bilancis ſeorſim explores; nullum inter illa diſcrimen notabile deprehendes: unde neceſſario ſequitur, quemvis

globum plumbeum ejusdem diametri eandem ad ſenſum quantitatem maſſae continere (47. §.), conſequenter maſſam plumbi pro aequabiliter denſa poſſe haberi. Ad tales ergo maſſas praecedentia principia ſemper licebit applicare, eo videlicet rigore, quem in omni praxi, ubi minutiae facile negliguntur, ſolemus obſervare.

60. Definitio.

Diviſio corporum in *ſolida*, *fluida*, *dura*, etc. repetenda eſt a diverſo gradu cohaeſionis inter particulas materiales ea corpora conſtituentes: quidquid illa ſint, non eſt, cur hic illorum definitiones quaeramus; dabimus eas, ubi de talibus corporibus in ſpecie actum fuerit. Supponemus enim in ſequentibus, omne corpus eſſe *rigidum* ſeu *perfecte durum*, nimirum tale, cujus omnes partes, etiam minimae, tanta vi inter ſe cohaereant, ut reſpectivi illarum ſitus a nullis aſſignabilibus viribus poſſint turbari.

61. Definitio.

Omnis vis motrix debet maſſam, in quam illa agit, ad motum ſollicitare (38. §.): dum hanc ab illa *trahi*, *urgeri*, *premi*, etc. dicimus, eandem vis motricis actionem, nimirum ſollicitationem ad motum, ſed ſub diverſo reſpectu conſideratam indicamus. *Aequales* dicentur vires, ſi quaevis illarum datam maſſam eadem efficacia ad motum ſollicitet: quodſi autem aliqua vis majori, alia minori efficacia id praeſtet; erit illa *major*, et haec *minor*, ſimulque ſumtae vires *inaequales* erunt.

62. Corollarium.

Fig. 1. Quaecunque vis V agat in punctum c datae maſſae mn (1. Fig.) directione cV, ſemper licebit cogitare pondus unum P, quod, ſi e puncto c libere penderet, punctum c deorſum directione verticali cP tanta efficacia ad motum urgeret, quanta illud a vi V ad motum directione cV concipiendum urgetur, id eſt; quaevis vis V poteſt aequari certo ponderi P (61. §.), atque hoc ſenſu vires per pondera ſolent aeſtimari.

Scholion.

Fieri poteſt, ut, durante motu alicujus maſſae, vis V maſſam continuo movens continuo mutetur, creſcat nimirum vel decreſcat: hoc caſu debebit vis V quovis momento alteri ponderi aequari, majori vel minori, prout illa eodem momento major evaſerit vel minor. Verum in ſequentibus

tibus niſus duntaxat virium ad motus producendos in conſiderationem vocabimus, nullam mutationis rationem habituri, quam fors niſus illi ſubire deberent, ſi motus re ipſa ſequeretur.

63. Definitio.

Si duae aut plures vires datam maſſam ad motum ſollicitent, ſeſe tamen ita impediant, ut ideo ſolum nullus in eadem maſſa motus ſequatur, licet haec a qualibet vi ad motum poſſit concitari; dicentur eae vires eſſe inter ſe in *Aequilibrio*.

64. Corollarium 1.

Quotcunque vires A, B, C, - - - a, b, c, - - - α, β, γ, etc. agant in datam maſſam, debebunt omnes inter ſe eſſe in aequilibrio, ſi vires A, B, C, etc. inter ſe, vires quoque a, b, c, etc. pariter inter ſe, et α, β, γ, etc. etiam inter ſe ſeorſim fuerint in aequilibrio (63. §.).

65. Corollarium 2.

Et ſi omnes vires P, Q, R, - - - Z, m, n, - - - x in certam maſſam agentes ſint inter ſe, et aliquae illarum P, Q, R, - - - Z inter ſe ſeorſim ſint in aequilibrio; debebunt etiam reliquae vires m, n, - - - x inter ſe ſeorſim eſſe in aequilibrio (63. §.).

66. Corollarium 3.

Vires aequales V, U (1. Fig.) in idem datae maſſae mn punctum c ſecundum directiones cV, cU oppoſitas, in una recta VU ſitas, agentes erunt neceſſario inter ſe in aequilibrio (61. 63. §.). Fig. 1.

67. Corollarium 4.

Si autem vires V > U in punctum c maſſae mn ſecundum oppoſitas directiones cV, cU agentes ſint inaequales, non poterunt eae eſſe in aequilibrio, ſed punctum c concipiet neceſſario motum aliquem ſecundum directionem cV vis majoris V (61. 63. §.).

68. Corollarium 5.

Viciſſim ergo, ſi duae vires V, U agentes in punctum c maſſae mn ſecundum directiones oppoſitas cV, cU ſint inter ſe in aequilibrio; debebunt eae inter ſe eſſe aequales (67. §.).

69. Corollarium 6.

Si autem duae vires V, U agentes in punctum c directionibus oppoſitis cV, cU non ſint inter ſe in aequilibrio, ſed re ipſa motum aliquem

in puncto c directione c U producant; erunt vires V, U inaequales, visque U erit major vi V: nam nec V=U poteſt eſſe (66. §.), nec V > U (67. §.).

70. Corollarium 7.

Quae in (66. 67. 68. 69. §.) de duabus viribus V, U in idem punctum c datae maſſae m n agentibus dicta ſunt, ad vires etiam A, B in duo diverſa maſſae m n puncta b, a agentes debent extendi, modo m n ſit maſſa corporis rigidi (60. §.), et directiones virium b A, a B oppoſitae cum punctis b, a in una recta A B jaceant: eadem enim eſt in hac hypotheſi actio utriusque vis in quodvis punctum b, a, ac ſi vis utraque in punctum a, vel utraque in b immediate ageret.

71. Corollarium 8.

Fig. 2. 3. Si, ſumta quacunque linea m n (2. 3. Fig.) perfecte inflexili ſeu rigida (60. §.) et libere quaquaverſus mobili, cogitentur in ejus puncta a, b, c, d, e, agere vires, A, B, C, D, E directionibus a A, bB, c C, d D, e E inter ſe parallelis, ita ut aut omnes ad eandem lineae m n partem jaceant (2. Fig.), aut aliquae a A, b B, c C, ad unam, aliae vero d D, e E ad partem ejus oppoſitam cadant (3. Fig.), ſic tamen ut hae ipſae directiones d D, e E ad partem certi puncti γ in linea m n ei oppoſitam jaceant, ad quam priores a A, b B, c C jacent; impoſſibile erit aequilibrium inter vires A, B, C, D, E (63. §.).

72. Corollarium 9.

Fig. 11. Sit linea A B (11. Fig.) fulcro immobili b in C ita innixa, ut circa illud libere poſſit converti. Si ejus punctum B a vi quacunque Q directione B Q ad motum ſollicitetur; debebit neceſſario linea A B circa C moveri, punctumque ejus A progredietur in arcu A α radii A C: verum ſi in A adſit fulcrum immobile a, naſcetur ob actionem vis Q certa preſſio in puncto A verſus fulcrum a determinata quapiam directione A y, atque hanc ipſam preſſionem debebit fulcrum a ſuſtinere, ne ob illam punctum A motum aliquem in arcu A α concipiat: quare, cum pro omni preſſione vis aliqua poſſit cogitari, quae in punctum, quod premitur, immediate agens, in illo eandem preſſionem producat; poſſibilis erit quoque certa vis P, quae, ſi in punctum A directione oppoſita A P agat, illud hac directione eadem efficacia ad motum ſollicitet, qua id directione A y a vi Q ſollicitatur, quae idcirco, ſublato fulcro a, cum vi Q ſit in aequilibrio (63. §.).

73. Co-

73. Corollarium 10.

Quodſi vero ſupponas, rectam AB circa fixum punctum C libere poſſe moveri, vires tamen P, Q directionibus AP, BQ in ejus puncta A, B agentes inter ſe eſſe in aequilibrio (72. §.); neceſſe eſt, ut punctum C ejus lineae verſus fulcrum immobile b determinatam quampiam preſſionem certa directione Cv perſentiſcat, ob quam, niſi illam ſuſtineret fulcrum b, punctum C directione Cv motum conciperet: ea propter, quia pro qualibet preſſione, quam datum punctum perſentiſcit, vis aliqua eſt cogitabilis, quae immediate in illud punctum agens, parem preſſionem data directione producat; poſſibilis eſt vis Z, quae, ſublato fulcro b, punctum C directione oppoſita CZ tanta efficacia ad motum urgeat, quanta id a viribus P, Q directione Cv urgetur, quae proinde cum his viribus ſit in aequilibrio (63. §.).

74. Corollarium 11.

Hinc (72. 73. §.) perſpicuum fit, ſemper, ſi in unum punctum B datae lineae AB libere quaquaverſus mobilis directione BQ agat quaecunque vis Q, poſſibiles eſſe duas vires P, Z, quae in bina quaevis alia puncta A, C ejusdem lineae certis directionibus AP, CZ agentes cum vi Q in perfecto aequilibrio ſint. Quamobrem nihil, quod ſit impoſſibile adeoque abſurdum, quaeremus, inveſtigaturi, quaenam relationes inter datam vim Q, viresque quaeſitas P, Z, directiones virium BQ, CZ, AP, et diſtantias punctorum A, B ab intermedio puncto C debeant intercedere, ut vires omnes Q, P, Z inter ſe ſint in perfecto aequilibrio.

DISSERTATIO II.

DE
LEGE AEQUILIBRII VIRIUM IN RECTAS INFLEXILES DIRECTE AGENTIUM.

75. Hypotheſis.

Directiones virium in datas quascunque rectas agentium ſint perpendiculares ad easdem rectas.

76. Theorema.

Fig. 4. 5. 6. *Si aut recta inflexilis* AB (6. Fig.) *in medio puncto* C, *aut angulus quiscunque invariabilis* ACB (4. 5. Fig.) *aequalium crurum* AC, BC *in vertice* C *ita figi cogitetur, ut tam illa recta, quam hic angulus libere circa punctum* C *converti, nullum tamen alium motum a viribus* P, Q *directionibus* AP, BQ (75. §.) *in puncta* A, B *agentibus poſſit recipere; erunt vires* P, Q *in aequilibrio, ſi eae fuerint inter ſe aequales.*

Demonſtratio.

Cum enim puncta A, B ab aequalibus viribus P, Q pari efficacia ſecundum directiones AP, BQ debeant premi, cumque, per hypotheſim, et puncta A, B aequaliter diſtent a puncto fixo C, et directiones virium AP, BQ ſub aequalibus angulis ad rectas AC, BC ſint inclinatae (75. §.); evidens eſt, tanta efficacia niti vim P rectam AC circa C convertere, quanta efficacia nititur vis Q rectam BC circa C movere: quare, cum ob inflexibilitatem rectarum AC, BC, AB, invariabilitatemque anguli ACB neutra rectarum AC, BC a vi in illam immediate agente circa C poſſit converti, quin tota recta AB (6. Fig.), totusque angulus ACB (4. 5. Fig.), in eandem partem circa C convertatur, cumque idcirco vires P, Q rectam AB (6. Fig.) et angulum ACB (4. 5. Fig.) in partes oppoſitas nitantur convertere; neceſſe eſt, ut ſub aſſumtis conditionibus aut perfecte quieſcat recta AB et angulus ACB, viresque P, Q ſint in aequilibrio (63. §.), aut in partes oppoſitas eodem tempore moveatur, quod eſt abſolute impoſſibile.

77. Co-

77. Corollarium 1.

Quod rectam AB (6. Fig.) in medio puncto C retinet, ne illa praeter motum rotationis circa C alium aliquem motum poſſit concipere, debet ſuſtinere preſſionem, quam ambae vires P, Q in puncto C directione Cv (75. §.) producunt; id ipſum ergo motum duntaxat puncti C, ad quem illud ea preſſione ſecundum directionem Cv ſollicitatur, impedit: quodſi ergo ſoluto vinculo in C, quo recta AB quaquaverſus libere mobilis reddatur, in ejus puncto medio C directione oppoſita CV (75. §.) applicetur vis V aequalis ſummae virium aequalium P, Q, quae idcirco punctum C directione CV tanta efficacia premat, quanta illud a viribus P, Q directione Cv premitur; erit vis V cum viribus P, Q in aequilibrio (76. 66. §.). Fig. 6.

78. Corollarium 2.

In quotcunque puncta a et h, b et g, c et f, d et e, aequidiſtantia a puncto medio C datae rectae ah (7. Fig.) in omnem partem libere mobilis agant vires aequales v, v, v, etc. directionibus av, bv, cv, dv, ev, fv, gv, hv (75. §.); erit cum omnibus vis unica X in aequilibrio, modo ea agat in C directione oppoſita CX (75. §.), aequeturque ſummae omnium virium v, v, v, etc. (77. 64. §.). Fig. 7.

79. Theorema.

Quidquid ſint duae vires P, Q (8. Fig.) *in duo puncta* A, B *datae rectae* AB *quaquaverſus libere mobilis directionibus* AP, BQ *agentes, et ubicunque inter puncta* A, B *ſumatur tertium punctum* C, *in quod directione oppoſita* CZ (75. §.) *agat vis tertia* Z; *neceſſe eſt, ut in ſtatu aequilibrii inter omnes tres vires* P, Q, Z, (74. §.), *vis media* Z *aequetur ſummae virium* P, Q. Fig. 8.

Demonſtratio.

Producta recta AB fiat CD=CB, et AC=EC, cogitenturque in D, E applicari vires s=Q, u=P, in C vero ſupponatur adhuc una vis Z agere. Cum, per hypotheſim, vis Z in aequilibrio ſit cum viribus P, Q; erit, ob pares prorſus cauſas, etiam vis altera Z in aequilibrio cum viribus s, u: quare, ſi praeterea in C directionibus Cx, Cy agerent vires aequales x, y, quarum quaevis ſit=P+s+Q+u=2P+2Q, cum hae inter ſe eſſent in aequilibrio (66. §.), deberent neceſſario omnes vires P, Q, Z, Z, s, u, x, y inter ſe eſſe in aequilibrio (64. §.). Eſſet autem una pars =2Q vis x cum viribus aequalibus s, Q, in D, et B et altera pars =2P ejus-

 dem

dem vis x cum viribus aequalibus P, u in aequilibrio (77. §.): ſublatis ergo viribus x, P, Q, s, u, maneret vis $=2Z$ agens in C directione CZ cum vi $y=2P+2Q$ agente in C directione oppoſita Cy in aequilibrio (65. §.), eoque ipſo deberet fieri $2Z=2P+2Q$ (68. §.), hinc $Z=P+Q$.

80. Theorema.

Si diſtantia AC *puncti* A *rectae inflexilis* AB *ab ejus puncto* C *major ſit quam diſtantia* BC, *et tres vires* P, Q, Z *agentes in punctis* A, B, C *directionibus* AP, BQ, CZ (75. §.) *ſint inter ſe in aequilibrio; erit vis* P *in diſtantia majori* AC *minor vi* Q *agente in diſtantia minori* BC.

Demonſtratio.

Patebit id, ſi oſtendatur, nec $P=Q$ poſſe eſſe, neque $P>Q$. Ea-propter accipiatur $AD=BD$, et in puncto D directionibus oppoſitis Dr, Ds applicentur vires aequales $r=2Q$, $s=2Q$: quia hae inter ſe debent eſſe in aequilibrio (66. §.); erunt omnes vires P, Q, Z, r, s inter ſe in aequilibrio (64. §.) Iam vero, ſi eſſet $P=Q$, adeoque vis r cum viribus P, Q in aequilibrio (77. §.); deberent, ſublatis viribus P, Q, r, vires s, Z inter ſe eſſe in aequilibrio (65. §), contra (71. §.): ſi autem eſſet $P>Q$, puta $P=Q+\omega$, adeoque vis r cum viribus Q, Q in A et B in aequilibrio (77. §.); manerent, remotis viribus r, et Q, Q ex D, A, B, vires Z, s, ω in C, D, A inter ſe in aequilibrio (65. §.), contra (71. §.)

81. Theorema.

Si, recta aB *inaequaliter ſecta in* b, C, *ita ut ſit* $aC>bC>BC$, *tres vires* k, q, Q *ejusmodi eſſe dicantur, ut, ſi, vi* Q *agente in* B, *in* b *applicetur vis* q, *et in* C *vis* $Z=q+Q$, *vel in* a *vis* k, *et in* C *vis* $Z=k+Q$, *caſu primo vis* $Z=q+Q$ *cum viribus* q, Q, *et caſu altero vis* $Z=k+Q$ *cum viribus* k, Q *debeat eſſe in aequilibrio; erit vis* k *agens in majori diſtantia* aC *minor vi* q *agente in minori diſtantia* bC.

Demonſtratio.

Producta recta aB ſumatur $Ca=CE$, et in a, E applicentur vires aequales k, u, in C vero directione oppoſita Cx agat vis $x=k+u$; erunt vires k, u, x inter ſe in aequilibrio (77. §.): quodſi ergo vires q, Q et $Z=q+Q$ ſint inter ſe in aequilibrio; erunt omnes vires k, u, q, Q, $x=k+u$, $Z=q+Q$ inter ſe in aequilibrio (64. §.). Quapropter,

cum

cum, per hypotheſim, vires k, Q cum vi $=k+Q$ in C ſint in aequilibrio, debebunt, ſublatis his viribus, reliquae q, u cum vi $=q+u$ in C manere in aequilibrio (65. §.) quod non poteſt fieri, quin, ob $CE=aC>bC$, ſit $u<q$ (80. §.), ſeu $k<q$.

82. Theorema.

Si, recta AB *in* C (9. Fig.) *ſic ſecta, ut pars major* AC *ſit rtupla partis minoris* BC, *adeoque* $AC=BC.r$ *pro quocunque numero integro* r, *in puncta* A, B, C *directionibus* AP, BQ, CS *agant vires* P, Q, S, *quarum ſecunda* Q *ſit rtupla primae, nimirum* $Q=Pr$, *et tertia* S *aequalis ſummae reliquarum virium* P, Q; *erunt vires* P, Q, S *in aequilibrio.* Fig. 9.

Demonſtratio.

1. Producta AB in utramque partem fiat $AE=BC=AD$, et $CF=CD$, hinc $BF=BE$.

2. Cum pars AC ſit *rtupla* partis BC; poteſt AC in numero r partes aliquotas ſingulas $=AE=BC$ dividi, eruntque in CD numero $r+1$, totidemque in CF, in BE autem erunt numero r, totidemque in BF partes aliquotae, ſingulae $=BC$, ob (1).

3. Quodſi ergo in puncta media a, b, c, - - - n, o r, ſingularum partium aliquotarum totius rectae DF in (2) cogitentur agere vires aequales $p=\frac{1}{2}P$ directionibus ap, bp, cp, etc.; erit ſumma virium p in a et b agentium $p+p=P$, adeoque erunt eae vires cum vi P in aequilibrio (77. §.). Summa porro omnium virium p per EF diffuſarum erit $=\frac{1}{2}P.2r$ ob (2), ſeu $=Pr=Q$ per hypotheſim: quare erunt etiam vires p per EF diffuſae cum vi Q in aequilibrio (78. §.). Omnes ergo vires p per totam rectam DF diffuſae erunt cum viribus P, Q in aequilibrio (64. §.).

4. Eapropter, ſi in C directionibus oppoſitis CS, CR applicentur vires aequales $S=P+Q$, $R=P+Q$, quia illae inter ſe debent eſſe in aequilibrio (66. §.); habebimus vires P, Q, R, S, et vires p per DF diffuſas, omnes ob (3) per (64. §.) inter ſe in aequilibrio. Eſt autem ſumma omnium per DF diffuſarum virium p ob (3) $=Pr+P=Q+P=R$; adeoque, ob $DC=CF$ per (1) eſt vis R cum omnibus per DF diffuſis viribus p in aequilibrio (78. §.): ſublatis igitur omnibus viribus p una cum vi R, manebit vis $S=P+Q$ ſola cum viribus P, Q in aequilibrio (65. §.).

 83. Co-

83. Corollarium.

Fig. 10. Recta ergo ae (10. Fig.) ſic ſecta in C, ut pars major aC ſit *rtupla* unius *ntae* partis partis minoris Ce, nimirum $aC = Ce \frac{r}{n}$; erit vis $x = u + v$ in aequilibrio cum viribus u, v, ſi fuerit reciproce vis $v = u \frac{r}{n}$ *rtupla* unius *ntae* partis vis u. Si enim capiatur $Cb = Cd = Ce . \frac{1}{n}$ pars *nta* rectae Ce, et in b, d cogitentur applicari vires z, y, prior $z = vn$, et poſterior $y = ur$, directione vero Cx concipiatur loco x agere vis $V = u + z + y + v$; cum in aſſumta hypotheſi debeat eſſe $aC = Cd . r$, et $eC = bC . n$, erunt vires u, y in C cum viribus u, y in a, d, et vires z, v in C cum viribus z, v in b, e ſeorſim in aequilibrio (82. §.): igitur erunt omnes vires, illae et hae, inter ſe in aequilibrio (64. §.). Quare, cum per hypotheſim ſit $v = u \frac{r}{n}$; hinc $vn = ur$, adeoque $z = y$, cumque idcirco vires z, y in C cum viribus z, y in b, d ſeorſim debeant eſſe in aequilibrio (77. §.); neceſſe eſt, ut ſublatis his viribus maneat vis $= v + u$ in C cum viribus v, u in e, a in aequilibrio (65. §.).

84. Theorema.

Fig. 8. *Quotiescunque tres vires* P, Q, x (8. Fig.) *directionibus* AP, BQ, Cx *egerint in tria puncta* A, B, C *rectae* AB *quaquaverſus libere mobilis; erunt illae inter ſe in aequilibrio, ſi fuerit* $P:Q = BC:AC$, *et* $x = P + Q$ (79. §.).

Demonſtratio.

1. Partes AC, BC rectae AB erunt inter ſe commenſurabiles vel incommenſurabiles (5. §.). Primo caſu extabit certus numerus integer r vel fractus $\frac{r}{n}$, pro quo ſit $AC = BC . r$ vel $AC = BC \cdot \frac{r}{n}$ (6. §.); hinc, ob $P:Q = BC:AC$ per hypotheſim, etiam $Q = Pr$ vel $Q = P \frac{r}{n}$, quod nequit ſubſiſtere, quin vires P, Q, x ſint inter ſe in aequilibrio (82. 83. §.).

2. Sint vero BC, AC duae rectae incommenſurabiles: debebit pro quovis quamtumlibet magno numero integro n extare alter numerus integer r, qui det $AC > BC . \frac{r}{n}$ et $AC < BC . \frac{r+1}{n}$ (12 §.); et pro iisdem numeris, cum per hypotheſim ſit $P:Q = BC:AC$, erit $Q > P \frac{r}{n}$ et $Q < P \frac{r+1}{n}$.

3. Hoc

3. Hoc praemiſſo ſupponamus in puncto A requiri vim ω, hinc in C vim $x = \omega + Q$, quo vires ω, x cum vi Q ſint in aequilibrio (74. 79. §.); dico, debere eſſe $\omega = P$, hinc $x = P + Q$.

4. Si enim accipiatur $bC = BC . \frac{r}{n}$, et $aC = BC . \frac{r+1}{n}$; jacebit ob (2) punctum A inter puncta a, b, et ſi in b applicetur vis $q = Q \frac{n}{r}$, in C autem vis $Z = q + Q$, vel in a vis $k = Q \frac{n}{r+1}$, et in C vis $Z = k + Q$; erunt vires q, Q cum vi $Z = q + Q$ caſu primo, et vires k, Q cum vi $Z = k + Q$ caſu altero in aequilibrio (83. §.): igitur erit ob (3) vis $\omega < q$ et $\omega > k$ (81. §.); adeoque ſemper $\omega < Q \frac{n}{r}$, et $\omega > Q \frac{n}{r+1}$, hinc $Q > \omega \frac{r}{n}$, et $Q < \omega \frac{r+1}{n}$, quod ob (2) eſt impoſſibile, quin ſit $Q : P = Q : \omega$ (22. §.) proinde $\omega = P$.

85. Theorema.

Et viciſſim, ſi vires P, Q *cum vi* $Z = P + Q$ *in recta* AB *quaquaverſus libere mobili ſint in aequilibrio; debebit eſſe* $P : Q = BC : AC$.

Demonſtratio.

Si ſtante aequilibrio inter vires P, Q, Z non eſſet $P : Q = BC : AC$; deberet in AB dari unum punctum a vel b, pro quo fieret $BC : aC = P : Q$, vel $BC : bC = P : Q$; et ſi, remota vi P ex puncto A, applicaretur in a vis $k = P$, vel in b vis $q = P$, eſſent vires k, Z, Q caſu primo, et q, Z, Q caſu ſecundo inter ſe in aequilibrio (84. §.), contra (81. §.).

86. Definitio.

Omnem rectam AB (11. Fig.) AC (12. Fig.) inflexilem gravitatisque expertem, in cujus bina puncta A, B ſupponuntur agere duae vires P, Q, ſi ea in uno puncto C ita ſit fixa, ut circa illud a viribus P, Q libere moveri, nullum tamen alium motum poſſit concipere, vocant *vectem mathematicum rectilineum*, et punctum fixum C *centrum motus*. Ipſe vero vectis eſt *heterodromus*, ſi centrum motus C (11. Fig.) jacet intra puncta A, B, in quae vires P, Q agunt: *homodromus* autem appellatur vectis, in quo puncta A, B a viribus P, Q ad motum ſollicitata (12. Fig.) ad eandem partem centri motus C cadunt. Fig. 11. 12.

87. Co-

87. Corollarium 1.

Fig. 11. Si directiones AP, Bq (11. Fig.) duarum virium P, q in puncta A, B vectis heterodromi AB (86. §.) agentium cadant ad diverſas partes ejusdem vectis, nitentur vires P, q vectem AC ad eandem partem circa centrum motus C convertere, conſequenter non poterunt eſſe in aequilibrio (63. §.): quare, ut duae vires P, Q in duo puncta A, B vectis heterodromi agentes poſſint eſſe in aequilibrio, debent illarum directiones AP, BQ ad eandem partem ejusdem vectis jacere.

88. Corollarium 2.

Fig. 12. In vecte autem homodromo AC (12. Fig.), ut duae vires P, Q agentes in ejus puncta A, B (86. §.) poſſint eſſe in aequilibrio, debent directiones AP, BQ earundem virium ad diverſas vectis partes cadere. Vires enim P, q[u] agentes in puncta A, B, quarum directiones AP, Bq[u] cadunt ad eandem partem vectis AC, nituntur hunc circa centrum motus C ad eandem partem convertere, et ideo nequeant illae eſſe in aequilibrio (63. §.).

89. Corollarium 3.

Fig. 11. Duae vires P, Q agentes in puncta A, B vectis heterodromi AB (11. Fig.) ſecundum directiones AP, BQ (75. 87. §.) debebunt eſſe in aequilibrio, ſi fuerit P:Q=BC:AC; preſſio autem, quam vires P, Q in centro motus C directione Cv directionibus AP, BQ parallela producent, aequabitur preſſioni, quam vis unica v=P+Q in C produceret, ſi illa directione Cv in C immediate ageret. Si enim recta AB non eſſet in C fixa, ſed quaquaverſus libere mobilis, et in C directione CZ ad AB perpendiculari ageret vis Z=P+Q; eſſet Z cum viribus P, Q in aequilibrio (84. §.): cum igitur vis Z illum duntaxat motum impediat, quem punctum C rectae AB directione Cv poteſt concipere; aberit omnis motus, viresque P, Q ſervabunt rectam AB in aequilibrio, ſi remota vi Z recta AB in C ita figatur, ut circa C libere converti, ſed nullum alium motum a viribus P, Q poſſit recipere.

90. Corollarium 4.

Et viciſſim utprimum in vecte heterodromo AB duae vires P, Q directionibus AP, BQ in ejus puncta A, B agentes (75. 87. §.) fuerint inter ſe

ſe in aequilibrio; debebit eſſe P:Q=BC:AC. Secus enim daretur in recta AB aliud aliquod punctum D vel d, pro quo eſſet P:Q=BD:AD vel P:Q=Bd:Ad, et ſi in D vel d directionibus Dr, Ds vel dr, ds (75. §.) applicarentur vires aequales r, s, ut ſit r=s=P+Q; eſſent tam hae inter ſe per (66. §.), quam P, Q inter ſe per hypotheſim, adeoque omnes quatuor r, s, P, Q inter ſe in aequilibrio (64. §.): quare, remotis viribus r, P, Q inter ſe in aequilibrio exiſtentibus (84. §.); deberet ſola vis s agens in D vel d rectam circa C libere mobilem ſervare in aequilibrio (65. §.), quod eſt impoſſibile.

91. Definitio.

Praeterea memorabilis eſt vectis *inflexus* ſeu *angularis*, quem duae rectae inflexiles AC, BC (13. Fig.) conſtituent, ſi illae ſub certo angulo ACB conjungantur, qui in vertice C ita fixus ſit, ut circa hunc libere converti, nullum tamen alium motum poſſit recipere, nec ullam mutationem ſubire, quaecunque vires P, Q agant in ejus latera AC, BC. Omnis vero vectis, tam angularis (13. Fig.), quam rectilineus (11. 12. Fig.) duo *Brachia* habere cenſetur, quorum nomine ejus partes AC, BC inter centrum motus C punctaque A, B, in quae binae vires P, Q ſupponuntur agere, interceptae debent intelligi. Fig. 13.

92. Theorema.

In omni vecte, tam rectilineo quam angulari (11. 12. 13. 14. Fig.), *vires* P, Q *directionibus* AP, BQ *in puncta* A, B *agentes* (75. §.) *erunt in aequilibrio, ſi illae ſint in ratione inverſa brachiorum, ſeu ſi ſit* P:Q =BC:AC (91. §.). *Et viciſſim erunt eae in hac ratione, ſi fuerint in aequilibrio.* Fig. 11. 12. 13. 14.

Demonſtratio.

Cum id pro quovis vecte heterodromo (11. Fig.) in (89. 90. §.) ſit demonſtratum, ſupereſt, ut idem adhuc pro vecte rectilineo homodromo (12. Fig.) et angulari (13. 14. Fig.) demonſtretur.

1. Quamobrem cogitetur produci majus brachium AC ultra C, ut fiat Cb = CB (12. 13. 14. Fig.), et in b concipiantur agere vires

 aequales

aequales q, q^1, quarum quaevis aequetur vi Q, directionibus b q, b q^1 (75. §.); erunt, non modo vires q, q^1 inter ſe (66. §.), ſed etiam vires Q, q^1 pariter inter ſe in aequilibrio (76. §.).

2. Quodſi ergo ſit P : Q = BC : AC, cum eo ipſo ſit quoque P : q = bC : AC ob (1), adeoque vis P cum q in vecte heterodromo Ab in aequilibrio (89. §.); erunt ob (1) omnes quatuor vires P, q, Q, q^1 inter ſe in aequilibrio (64. §.): remotis itaque viribus q, q^1 manebunt vires P, Q inter ſe in aequilibrio ob (1) per (65. §.).

3. Et ſi vires P, Q ſint inter ſe in aequilibrio; erunt ob (1) per (64. §.) omnes quatuor P, Q, q, q^1 inter ſe in aequilibrio: igitur remotis viribus Q, q^1 manebunt vires P, q ob (1) per (65. §.) in vecte heterodromo Ab inter ſe in aequilibrio; proinde debebit eſſe P : q = bC : AC (90. §.), hinc ob (1) P : Q = BC : AC.

DISSER-

DISSERTATIO III.

DE VIRIBUS IN RECTAS INFLEXILES OBLIQUE AGENTIBUS, EARUMQUE COMPOSITIONE, ET RESOLUTIONE.

93. Theorema.

Si in punctum A *rectae* AC (15. 16. Fig.) *circa fixum extremum* C *libere mobilis agant duae vires, una* X *directione* AX *ad* AC *perpendiculari, et altera* Q *directione* AQ *ſub angulo acuto vel obtuſo* QAC *ad* AC *inclinata, et* CD *ſit perpendicularis ad directionem vis* Q; *erunt vires* X, Q *in aequilibrio, ſi fuerit* X:Q=CD:AC; *et viciſſim, ſi vires* X *ſint in aequilibrio, erit* X:Q=CD:AC. Fig. 15. 16.

Demonſtratio.

1. Si praeter vires Q, X agentes in punctum A applicetur in A vis x=X directione Ax ad AC perpendiculari, et in D vis q=Q directione Dq cum AQ jacente in una recta AD, recta vero AC ſupponatur eſſe unum latus plani ADC ad D rectanguli et circa punctum fixum C mobilis; erunt vires X, x inter ſe, et q, Q pariter inter ſe (66. 70. §.), conſequenter omnes quatuor vires X, x, q, Q inter ſe in aequilibrio (64. §.).

2. Sit jam X:Q=CD:AC, adeoque ob (1) etiam x:q=CD:AC, debebunt vires q, x eſſe inter ſe in aequilibrio, cum illae planum ADC haud alia efficacia circa C convertere nitantur, quam qua eae vectem angularem ACD niterentur circa C convertere (92 §.); quodſi ergo abſint vires q, x, manebunt vires X, Q ob (1) inter ſe in aequilibrio (65. §.).

3. Si vero dicas, vires X, Q eſſe in aequilibrio; debebunt, iis remotis, vires x, q inter ſe manere in aequilibrio; ob (1) per (65. §.): ſed ſi vires x, q agentes in puncta A, D plani ADC circa C mobilis ſunt in

 aequi-

aequilibrio, erunt illae eo quoque caſu in aequilibrio, ſi eidem plane vectis angularis ACD circa C mobilis ſubſtituatur; conſequenter debebit eſſe x:q=CD:AC (92. §.), hinc ob (1) X:Q=CD:AC.

94. Corollarium 1.

Vis Q agens in punctum A rectae AC circa fixum extremum C libere mobilis ſecundum directionem AQ ſub angulo CAQ ad AC inclinatam, tanta efficacia nititur rectam AC circa C convertere, quanta efficacia id praeſtare niteretur vis $x = X = \frac{Q.CD}{AC} = Q \text{ Sin } CAQ$, ſi haec in idem punctum A directione Ax ad AC perpendiculari ageret (93. §.).

95. Corollarium 2.

Si in punctum A rectae AC circa fixum extremum C mobilis agant vires P, Q ſecundum directiones AP, AQ; erunt hae vires in aequilibrio, ſi fuerit P Sin PAC = Q Sin QAC: et viciſſim, ſi eae ſint in aequilibrio, erit P Sin PAC = Q Sin QAC. Si enim in A directionibus AX, Ax ad AC perpendicularibus applicentur vires X = P Sin PAC, x = Q Sin QAC; erunt vires X, x (66. §), proinde etiam P, Q inter ſe in aequilibrio (94. §.), ſi fuerit X = x; et viciſſim, ſi vires X, x, adeoque etiam P, Q ſint inter ſe in aequilibrio (94. §.), erit X = x (68. §.).

96. Definitio.

Fig. 17. Si in datum punctum A (17. Fig.) agant duae vires P, Q ſecundum directiones AP, AQ ſub quocunque angulo PAQ concurrentes, quem deinceps nomine *Anguli virium* intelligemus; debebit punctum A media quapiam directione AC ab iisdem viribus ad motum inchoandum ſollicitari, ac ſi illud ab una vi C ea ipſa directione premeretur: idcirco vocatur directio ejusmodi AC *Directio media* virium P, Q; et vis C, quae ſola agens in punctum A iſtud directione media AC tanta efficacia premeret, quanta id a viribus P, Q ea directione premitur, appellatur *Vis media*, reſpectu cujus vires P, Q vocantur *laterales*.

97. Corollarium 1.

Inventio directionis mediae AC (96. §.) pendet ab inventione angulorum PAC, QAC inter illam et directiones datarum virium lateralium P, Q interceptorum.

98. Co-

98. Corollarium 2.

Debet autem directio media virium P, Q in punctum A agentium ejusmodi eſſe indolis, ut, ſi punctum A ſupponatur pertinere ad rectam inflexilem AC coincidentem cum directione media, rectaque AC cogitetur in C ita figi, ut ea circa C libere converti, nullum tamen alium motum poſſit recipere, vires P, Q eo ipſo debeant eſſe inter ſe in aequilibrio (96. §.).

99. Corollarium 3.

Et viciſſim, ſi vires P, Q agentes in punctum A rectae AC circa punctum fixum C libere mobilis ſint inter ſe in aequilibrio; debebit recta AC coincidere cum media directione virium P, Q. Secus premeretur punctum A a viribus P, Q alia quapiam directione Aγ, ac ſi, abſentibus viribus P, Q, vis media γ ſola ſecundum directionem Aγ in A ageret (96. §.); conſequenter deberet recta AC converti circa C, contra hypotheſim aequilibrii.

100. Corollarium 4.

Quoties ergo fuerit $P \, Sin \, PAC = Q \, Sin \, QAC$, toties erit AC directio media virium P, Q (99. 95. §.); et viciſſim quoties fuerit AC directio media virium P, Q, toties debebit eſſe $P \, Sin \, PAC = Q \, Sin \, QAC$ (98. 95. §.).

101. Corollarium 5.

Quemcunque ſitum habeat directio media AC datarum virium P, Q, et quantacunque ſit vis media C ex illis reſultans, ſi haec innoteſceret, directioneque oppoſita AM applicaretur vis M ei aequalis; deberet vis M in aequilibrio eſſe cum viribus P, Q (96. 66. §.). Et viciſſim, inventa vi M, quae directione AM oppoſita directioni mediae AC virium P, Q agens in punctum A cum viribus P, Q ſit in aequilibrio; erit eadem vis M aequalis vi mediae reſultanti ex viribus lateralibus P, Q (68 96. §.).

102. Corollarium 6.

Quoties demum tres vires M, P, Q directionibus AM, AP, AQ in datum punctum A agentes fuerint inter ſe in aequilibrio; debebit directio media quarumvis binarum virium coincidere cum producta directione vis tertiae; e. gr. directio media virium P, Q coincidet cum producta di-

rectione AM vis tertiae M. Si enim AC ſit productio directionis AM, et punctum A ſupponatur ſpectare ad rectam AC coincidentem cum illa productione, atque circa punctum fixum C libere mobilem; erunt nunc quoque omnes tres vires M, P, Q inter ſe in aequilibrio: quare, cum vis M directione CM agens in punctum C nullo pacto influat in converſionem rectae AC circa C, ſublata vi M, manebunt vires P, Q inter ſe in aequilibrio, eoque ipſo eſt AC directio media harum virium (99. §.).

103. Problema.

Datis duabus viribus P, Q *in unum punctum* A *ſecundum directiones* AP, AQ *agentibus, datoque earum angulo* PAQ$=\varphi$, *invenire directionem mediam* AC.

Solutio.

Directio media virium P, Q determinabitur, ſi definiantur anguli PAC$=$p, QAC$=$q, quos directio media AC cum directionibus AP, AQ illarum virium debet intercipere (97. §.): hi vero anguli poſſunt ſequenti modo inveniri. Debet eſſe

$$p=\varphi-q;\quad q=\varphi-p;$$

et $P \operatorname{Sin} p = Q \operatorname{Sin} q$ per (100. §.):

per (Vol. I. 5. §. 1. Schol.) erit ergo

$$P \operatorname{Sin} p = Q \operatorname{Sin}\varphi \operatorname{Cof} p - Q \operatorname{Cof}\varphi \operatorname{Sin} p;$$

$$Q \operatorname{Sin} q = P \operatorname{Sin}\varphi \operatorname{Cof} q - P \operatorname{Cof}\varphi \operatorname{Sin} q.$$

Quare, ſi prior aequatio per Coſ p, et poſterior per Coſ q dividatur, fiet

$$P \operatorname{Tang} p = Q \operatorname{Sin}\varphi - Q \operatorname{Cof}\varphi \operatorname{Tang} p;$$

$$Q \operatorname{Tang} q = P \operatorname{Sin}\varphi - P \operatorname{Cof}\varphi \operatorname{Tang} q.$$

Habebimus itaque

$$\operatorname{Tang} p = \frac{Q \operatorname{Sin}\varphi}{P + Q \operatorname{Cof}\varphi};\quad \operatorname{Tang} q = \frac{P \operatorname{Sin}\varphi}{Q + P \operatorname{Cof}\varphi}.$$

104. Problema.

Inventa directione media AC *duarum virium* P, Q *in punctum* A *ſecundum directiones* AP, AQ *agentium, invenire vim mediam* M.

Solu-

Solutio.

Cum nota ſit directio media AC, noti debent eſſe etiam anguli $p = CAP$, $q = CAQ$ (103. §.). Iam vero vis media aequabitur vi M, quae ſecundum mediam directionem CA, ſeu potius ſecundum illius productionem AM in punctum A agens cum viribus P, Q, eſſet in aequilibrio (101. §.): pro illa, ſi AP verſus S, et AQ verſus R producatur, erit ergo AS directio media virium M, Q, et AR directio media virium M, P (102. §.). Per (100. §.) habebimus itaque

$$M \operatorname{Sin} MAS = Q \operatorname{Sin} QAS;\quad M \operatorname{Sin} MAR = P \operatorname{Sin} PAR.$$

Sed eſt $PAC = MAS = p$; $QAC = MAR = q$;

et $QAS = PAR = 180° - \varphi$: ergo erit

$$M \operatorname{Sin} p = Q \operatorname{Sin} \varphi;\quad M \operatorname{Sin} q = P \operatorname{Sin} \varphi;$$

$$M = \frac{Q \operatorname{Sin} \varphi}{\operatorname{Sin} p};\quad M = \frac{P \operatorname{Sin} \varphi}{\operatorname{Sin} q}.$$

105. Corollarium 1.

Datis duabus viribus P, Q agentibus in datum punctum A, datoque virium angulo $\varphi = PAQ$ (96. §.), licebit tam illarum directionem mediam AC per (103. §), quam dependenter ab hac ipſam vim mediam M per (104. §.) determinare. Poteſt vero vis media M inveniri etiam independenter a directione media AC hoc modo.

$$\frac{Q \operatorname{Sin} \varphi \operatorname{Cof} p}{\operatorname{Sin} p} = P + Q \operatorname{Cof} \varphi \text{ (103. §.)}:$$

igitur elevando ad quadratum

$$\frac{Q^2 \operatorname{Sin} \varphi^2 \operatorname{Cof} p^2}{\operatorname{Sin} p^2} = P^2 + 2PQ \operatorname{Cof} \varphi + Q^2 \operatorname{Cof} \varphi^2$$
$$= P^2 + 2PQ \operatorname{Cof} \varphi + Q^2 - Q^2 \operatorname{Sin} \varphi^2.$$

Hinc porro, facta translatione et reductione, ob $\operatorname{Sin} p^2 + \operatorname{Cof} p^2 = 1$, obtinebimus

$$\frac{Q^2 \operatorname{Sin} \varphi^2}{\operatorname{Sin} p^2} = P^2 + Q^2 + 2PQ \operatorname{Cof} \varphi.$$

Et ideo per (104. §.) fiet

$$M = \sqrt{(P^2 + Q^2 + 2PQ \operatorname{Cof} \varphi)}.$$

106. Corollarium 2.

Si vires P, Q agentes in punctum A ſint aequales, nimirum $P = Q$; erit vis media ex illis reſultans $M = \sqrt{(2P^2 + 2P^2 \operatorname{Cof} \varphi)} = P\sqrt{2(1 + \operatorname{Cof} \varphi)}$

per

per (105. §.): directio autem media AC (96. §.) ita determinabitur, ut ſit $\text{Tang}\,p = \text{Tang}\,q$, proinde angulus $p = PAC = q = QAC$ (103. §.), id eſt, dum aequales vires P, Q ſub quocunque directionum angulo PAQ datum punctum A ad motum ſollicitant, directio media AC debet angulum PAQ biſſecare.

107. Corollarium 3.

Eo determinato caſu, quo angulus virium $\varphi = PAQ$ rectus fuerit, erit $\text{Sin}\,\varphi = 1$, et $\text{Coſ}\,\varphi = 0$: igitur erit vis media $M = \sqrt{(P^2 + Q^2)}$ per (105. §.); et pro directione media AC debebit fieri $\text{Tang}\,p = \frac{Q}{P}$, $\text{Tang}\,q = \frac{P}{Q}$ (103. §.). Quodſi porro in eadem hypotheſi vires P, Q ſint aequales; fiet vis media $M = P\sqrt{2}$, directione media AC biſſecante angulum virium PAQ (106. §.).

108. Corollarium 4.

Pro quolibet angulo virium $\varphi = PAQ$ eſt $\text{Coſ}\,\varphi$ fractio genuina radii $= 1$, adeoque minor unitate, et quidem valoris negativi, dum angulus φ eſt obtuſus: ſemper eſt ergo $2PQ\,\text{Coſ}\,\varphi < 2PQ$, hinc etiam $P^2 + Q^2 + 2PQ\,\text{Coſ}\,\varphi < P^2 + Q^2 + 2PQ = (P+Q)^2$, et ideo $M < P+Q$ (105. §.). Nimirum omni caſu erit vis media minor quam ſumma virium lateralium (96. §.).

109. Corollarium 5.

Cum porro pro quolibet angulo φ obtuſo ſit ejus coſinus negativus, pro quovis vero acuto poſitivus; patet, vim mediam M reſpondentem duabus viribus lateralibus P, Q majorem futuram pro quolibet angulo $\varphi = PAC$ acuto, quam pro obtuſo (105. §.).

110. Corollarium 6.

Ex (102. 104. §.) elucet, ſemper, dum tres vires M, P, Q in datum punctum A agentes ſunt in aequilibrio, binas quasque vires eſſe inter ſe in ratione directa ſinuum angulorum, quos illarum directiones cum directione vis tertiae comprehendunt: eſt enim

$$M : Q = \text{Sin}\,\varphi : \text{Sin}\,p;$$
$$M : P = \text{Sin}\,\varphi : \text{Sin}\,q;$$
$$P : Q = \text{Sin}\,q : \text{Sin}\,p;$$

Scho-

Scholion.

In quamplurimis disquiſitionibus vires per lineas utiliſſime exprimuntur: ſicut enim omnia quanta ad certas menſuras relata (14. §.) per numeros poſſunt exprimi (15. 18. §.); ſic licebit eadem quanta per lineas determinatae longitudinis exprimere, modo communis aliqua linearum menſura praevie definiatur.

1. Sit v communis virium menſura, ut e. gr. pondus unius librae communis ponderum menſura (14. §.); pro menſura autem linearum ſumatur lineola l, e. gr. unus pes. Quidquid ſit vis V, ſemper erit cogitabilis linea recta L, cujus ratio ad aſſumtam menſuram l aequetur rationi vis V ad ejus menſuram v, quo fiat $L:l = V:v$, hinc $V = v.\frac{L}{l}$, et ideo $V = \frac{L}{l}$ pro $v = 1$, vel etiam $V = L$ pro $l = 1$. Hoc ſenſu dicetur *recta* L *exprimere vim* V: proprie autem aequatio $V = L$ nihil aliud poteſt denotare, quam exponentem rationis (qui ſub V debet intelligi) vis V ad aſſumtam virium menſuram v aequari exponenti rationis (quem L in illa aequatione debet ſignificare) lineae rectae L ad aſſumtam linearum menſuram l, quo fiat, ut idem numerus, tali exponenti aequalis, jam vim V, jam rectam L expreſſurus ſit, ſi is ad menſuram v virium, vel menſuram l linearum pro unitate aſſumtam referatur (15. 18. §.).

2. Quotcunque ergo dentur vires U, X, Z, poterunt illae per totidem lineas rectas u, x, z exprimi. Aſſumta nimirum communi virium menſura v et communi linearum menſura l, quaeratur recta u exprimens vim U per (1), tum determinentur reliquae rectae x, z ita, ut illae ad rectam u in eadem ſint ratione, in qua ſunt vires X, Z ad vim U: nam ſi ſit $u = U$ in ſenſu (1), et $Z:U = z:u$, $X:U = x:u$; erit utique etiam $x = X$ et $z = Z$ in eodem ſignificatu.

III. Problema.

Datis viribus P, Q *in punctum* A *ſecundum directiones* AP, AQ, *ſub dato angulo* PAQ *concurrentes agentibus, geometrice determinare tam directionem, quam vim mediam.*

Solutio.

In rectis AP, AQ coincidentibus cum virium P, Q directionibus ſumantur partes Ab, Aa, quae datas vires P, Q exprimant, ita ut ſit P : Q =

Ab:Aa, tum conſtruatur parallelogrammum Abda; diagonalis Ad erit directio media virium P, Q, exprimetque ſua longitudine vim mediam M, ita ut ſit M:P=Ad:Ab, et M:Q=Ad:Aa (110. §. Schol.)

Demonſtratio.

In parallelogrammo enim Abda eſt Ab:Aa=Sin dAa:Sin dAb= Sin QAC:Sin PAC: cum igitur ſit Ab:Aa=P:Q; eſt quoque P:Q= Sin QAC:Sin PAC, et P Sin PAC=Q Sin QAC, eoque ipſo coincidit diagonalis Ad cum media directione virium P, Q (100. §).

Porro eſt in eodem parallelogrammo Ab:Ad=Sin aAd:Sin PAQ, et P:M=Sin aAd:Sin PAQ (104. §.): igitur debet eſſe Ab:Ad=P:M; cumque fuerit P:Q=Ab:Aa, adeoque $Ab=\frac{P.Aa}{Q}$, eſt etiam $\frac{P.Aa}{Q}$: Ad=P:M, ſeu Aa:Ad=Q:M.

112. Definitio.

Duas vires P, Q ſecundum directiones AP, AQ in unum punctum A agentes in unam vim *componere* tantundem ſignificat, ac tam mediam directionem AC virium P, Q, quam vim mediam ex illis reſultantem invenire (96. §.); haec vis media vocatur idcirco *vis compoſita*, et reſpectu illius ſunt P, Q vires *componentes*. Quodſi autem detur una vis V agens in punctum A ſecundum datam directionem AC; vim V in duas vires P, Q, quae in idem punctum A ſecundum certas directiones AP, AQ cum AC in eodem plano jacentes agant, *reſolvere* tantundem ſignificabit, ac ejusmodi vires P, Q invenire, ut et media illarum directio coincidat cum directione AC vis datae V, et vis media ex illis reſultans aequetur datae vi V.

113. Corollarium 1.

Preſſio, quam punctum A ſecundum directionem mediam AC a datis viribus componentibus P, Q perſentiscit, aequatur preſſioni, quam vis compoſita V in puncto A produceret, ſi illa, remotis viribus P, Q, ſola in punctum A ſecundum mediam directionem AC ageret (112. 96. §.): hoc ſenſu *aequivalebit* vis compoſita V viribus componentibus P, Q ſimul ſumtis, licet vis compoſita V ſemper ſit minor quam ſumma virium componentium P, Q (112. 108. §.).

114. Co-

114. Corollarium 2.

Compoſitio datarum virium P, Q, dato illarum angulo $PAQ=\varphi$ (96. §.), perficietur trigonometrice, ſi directio media AC per (103. §.) et vis media (112. §.) per (104. §.), vel (105. §.) determinetur. Geometrice, vero poterit ea per (111. §.) perfici.

115. Corollarium 3.

Quodſi autem detur vis V agens in datum punctum A ſecundum datam directionem AC, quae in binas vires P, Q ſecundum determinatas directiones AP, AQ debeat reſolvi; poterit haec reſolutio, dato angulo $PAQ=\varphi$, trigonometrice perfici, ſi vires P, Q per (104. §.), ob (112. §.) ita definiantur, ut ſit

$$P=\frac{V \operatorname{Sin} QAC}{\operatorname{Sin}\varphi}; \quad Q=\frac{V \operatorname{Sin} PAC}{\operatorname{Sin}\varphi}.$$

116. Corollarium 4.

Geometrica datae vis V in punctum A directione AC agentis reſolutio perficietur hoc modo. Abſcindatur in recta AC pars Ad, quae vim V exprimat (110. §. Schol.), tum ex d ducantur parallelae da, db ad datas directiones AP, AQ virium, in quas V debet reſolvi: latera enim Ab, Aa debebunt has ipſas vires exprimere (112. 111. §.).

117. Corollarium 5.

Hoc modo vis $V=Ad$ agens in punctum A datae rectae AB (18. Fig.) ſecundum directionem AC ſub angulo acuto $BAC=\alpha$ ad AB inclinatam, conſtructo rectangulo Abda, reſolvi ſolet in duas vires, quarum una $Aa=V \operatorname{Sin}\alpha$ directione Aa ad AB perpendiculari, et altera $Ab=V \operatorname{Cof}\alpha$ directione Ab in recta AB jacente agat in punctum A (116. §.). Fig. 18.

ſenſum parallelas deorſum premantur, quo fit, ut hae directiones in omni corporis ſitu unam eandemque plagam reſpiciant. Verum poſſibile eſt, ut puncta dati ſyſtematis ab aliis viribus ad motum urgeantur, quarum directiones ſint inter ſe parallelae, et omnes in quovis ſitu ſyſtematis in eandem plagam tendant, licet haec mutato ſitu ſyſtematis mutetur.

120. Theorema.

Si recta bD (19. Fig.), *in cujus puncta* b, a *agant duae vires* Q, P *ſecundum directiones parallelas* bQ, aP *ſecetur in* C, *ita ut ſit* P : Q = bC : aC, *et in* C *directione* Cc *parallela directionibus* bQ, aP *applicetur vis* c = P + Q; *erit haec in aequilibrio cum viribus* P, Q. Fig. 19.

Demonſtratio.

1. Vires P, Q, c agentes directionibus aP, bQ, Cc in puncta a, b, C, ſi ponatur angulus $DaP = DbQ = cCb = \varphi$, poſſunt per (117. §.) in ſequentes vires reſolvi.

Vis P in $a\alpha = P\,\mathrm{Sin}\,\varphi$, et $a\alpha^1 = P\,\mathrm{Coſ}\,\varphi$;
Q in $b\beta = Q\,\mathrm{Sin}\,\varphi$, et $b\beta^1 = Q\,\mathrm{Coſ}\,\varphi$;
c in $C\gamma = c\,\mathrm{Sin}\,\varphi$, et $C\gamma^1 = c\,\mathrm{Coſ}\,\varphi$.

2. Quamobrem erunt vires P, Q, c in aequilibrio, ſi vires $a\alpha$, $a\alpha^1$, $b\beta$, $b\beta^1$, $C\gamma$, $C\gamma^1$ omnes inter ſe fuerint in aequilibrio. Eſt autem per hypotheſim $c = P + Q$: igitur eſt vis $C\gamma^1$ aequalis ſummae virium $a\alpha^1$, $b\beta^1$ in (1), proinde cum his viribus in aequilibrio (66. 70. §.). Porro eſt per hypotheſim $P : Q = bC : aC$: igitur $a\alpha : b\beta = bC : aC$ in (1); conſequenter ſunt quoque vires $a\alpha$, $b\beta$ cum vi $C\gamma = a\alpha + b\beta$ in aequilibrio (89. §.).

121. Corollarium 1.

Secundum quascunque directiones aP, bQ inter ſe parallelas egerint binae vires P, Q in duo puncta a, b unius rectae bD; jacebit illarum centrum aequilibrii in puncto C ejusdem rectae ſic determinato, ut ſit $Ca : Cb = Q : P$; idemque centrum ita premetur a viribus P, Q directione Ce parallela directionibus aP, bQ, ac ſi in illud una vis $e = P + Q$ immediate ageret (120. 119. §.).

122. Corollarium 2.

Pro viribus aequalibus P, Q erit $Ca = Cb$: centrum aequilibrii illarum coincidet ergo cum puncto medio C rectae ab (121. §.).

 123. Co-

librio (125. §.): utprimum ergo data ſolutio de certo numero n virium vera eſt, debet illa eo ipſo etiam de numero n+1 talium virium vera eſſe, unde et ex (1) per (Vol. I. §. 31.) ſequitur, datam ſolutionem problematis de quovis poſſibili virium numero veram debere eſſe.

127. Problema.

Fig. *Si ſingula puncta* a, b, c, d, e, f, - - - p, q *alicujus ſyſtematis a totidem viribus* A, B, C, D, E, F, - - - P, Q *ſecundum directiones* aA, bB, - - - qQ *inter ſe parallelas et in eandem plagam tendentes ad motum ſollicitentur, conſtetque, vires* A, B, C, - - - P *habere centrum aequilibrii in* α, *in quo vis una* x=A+B+C+ - - - +P *agens directione oppoſita* αx *parallela virium* A, B, etc. *directionibus cum omnibus viribus* A, B, C - - - P *eſſet in aequilibrio; invenire tam centrum aequilibrii virium* A, B, C, - - - P, Q *quam directionem quantitatemque vis in illo applicandae, ut ea cum omnibus viribus* A, B, C, - - - P, Q *ſit in aequilibrio.*

Solutio.

Ducta e centro aequilibrii α virium A, B, C, - - - - P ad punctum q, in quod agit vis Q, recta αq, determinetur in eadem recta punctum β ſic, ut ſit

$$\alpha\beta = \frac{\alpha q . Q}{A+B+C+ - - - +P+Q};$$

erit β centrum aequilibrii virium A, B, C, - - - P, Q, in quo vis unica y=A+B+C+ - - - + P + Q ſecundum directionem βv oppoſitam et parallelam directionibus illarum virium applicata debebit cum omnibus viribus A, B, C, - - - - P, Q eſſe in aequilibrio.

Demonſtratio.

Si in centrum aequilibrii α virium A, B, - - - P ſecundum oppoſitas directiones αx, αy parallelas directionibus illarum virium agant vires aequales x, y, quarum quaevis aequetur ſummae virium A, B, C, - - - P, et praeterea in β agat vis v=y+Q=A+B+C+ - - - +P+Q directione βv parallela directionibus αy, qQ; erit β centrum aequilibrii virium y, Q, et vis v in aequilibrio cum viribus y, Q (121. 123. §.): cum igitur per hypotheſim ſit vis x in aequilibrio cum viribus A, B, C, - - - P; erunt omnes vires A, B, C, - - - P, Q, v, x, y inter ſe in aequilibrio (64. §.). Quamobrem, quia vires x, y ſunt inter ſe ſeorſim in aequilibrio

librio (66. §.), ſublatis his viribus manebit vis v in aequilibrio cum viribus A, B, C, - - - P, Q (65. §.), punctumque β erit centrum aequilibrii virium A, B, C, - - - P, Q (119. §.).

128. Corollarium 1.

Pro quovis ſyſtemate punctorum, quae a totidem viribus ſecundum directiones inter ſe parallelas et in eandem plagam tendentes ad motum urgeantur (118. §.), debebit dari unum centrum aequilibrii, in quo vis unica ſecundum directionem oppoſitam applicata, in quovis ſitu ſyſtematis cum iisdem viribus eſſet in aequilibrio, ſi illa ſummae omnium virium aequaretur. Cum enim hoc pro ſyſtemate duorum punctorum in (121. §.) ſit demonſtratum, idque, ſi de ſyſtemate conſtante punctis quocunque numero n verum eſſe ſupponatur, eo ipſo etiam pro ſyſtemate uno plurium punctorum debeat ſubſiſtere (127. §.); neceſſarium eſt, ut id generatim de quovis poſſibili ſyſtemate ſit verum (Vol. I. §. 31.).

129. Corollarium 2.

Eſt autem abſolute impoſſibile, ut unum idemque ſyſtema plura centra aequilibrii habeat. Ponamus enim datum ſyſtema (21. Fig.) habere unum centrum aequilibrii in puncto α, in quod agat vis $x = A + B +$ - - - $+ Q$ directione oppoſita et parallela directionibus virium A, B - - - Q in quovis ſitu ſyſtematis, quo illa ſit in quovis ſyſtematis ſitu in aequilibrio cum omnibus viribus A, B, - - - Q (128. §.); dico, praeter hoc nullum aliud centrum aequilibrii β in eodem ſyſtemate eſſe poſſibile. Secus enim poſſet ſyſtemati talis ſitus tribui, in quo directio αx vis x cum recta $\alpha\beta$, non coincidat, ſed certum angulum $x\alpha\beta$ formet; daretur porro aliqua vis v, quae in β certa directione βv agens cum omnibus viribus A, B, - - - Q ſyſtematis eſſet in aequilibrio (119. §.): quare, ſi in α cogitetur agere vis y aequalis vi x ſecundum directionem αy directioni αx oppoſitam, quae cum x ſit eo ipſo in aequilibrio (66. §.); debebunt omnes vires A, B, - - - Q, v, y, x eſſe inter ſe in aequilibrio (64. §.). Cum igitur vis x ſit in aequilibrio cum viribus A, B, - - - Q; deberet, ſublatis his omnibus viribus, vis y cum vi v manere in aequilibrio, quod eſt impoſſibile.

 130. De-

130. Definitio.

Si ſyſtema plurium punctorum ad datum quodcunque planum referatur, productum ex qualibet vi in uno puncto ſyſtematis applicata (118. §.) in diſtantiam perpendicularem hujus puncti a dato plano vocabitur, improprie quidem, *Momentum vis reſpectu ejusdem plani;* ſumma vero momentorum omnium virium ſyſtematis reſpectu unius plani poſitione dati dabit *Momentum ſyſtematis reſpectu ejusdem plani.*

131. Corollarium.

In quotcunque partes cogitetur datum ſyſtema plurium punctorum diviſum, quae ſeorſim totidem ſyſtemata exhibebunt (118. §.); erit ſumma momentorum omnium partium reſpectu dati plani aequale momento totius ſyſtematis reſpectu ejusdem plani (130. §.).

132. Lemma.

Fig. 22. *Si recta* AB (22. Fig.) *ſecetur in* C *in data ratione* r : s, *ut ſit* AC : BC = r : s, *et ex punctis* A, B, C *ad planum* MN *poſitione datum ducantur perpendicula* $A\alpha$, $B\beta$, $C\gamma$; *debebit eſſe* $(r+s)C\gamma = r.B\beta + s.A\alpha$.

Demonſtratio.

Cogitetur duci per C aliud planum mn parallelum plano MN; debebunt perpendicula $A\alpha$, $B\beta$ ei in duobus punctis a, b occurrere; et ſi ex C ad haec puncta ducantur in plano mn rectae Ca, Cb, naſcentur triangula ſimilia AaC, BbC ad a, b rectangula: erit igitur

$$AC : BC = Aa : Bb:$$

quare, cum per hypotheſim ſit

$$AC : BC = r : s, \text{ erit}$$

$$r : s = Aa : Bb = (C\gamma - A\alpha) : (B\beta - C\gamma).$$

Et hinc obtinebimus

$$r(B\beta - C\gamma) = s(C\gamma - A\alpha), \text{ adeoque}$$

$$(r+s)C\gamma = r.B\beta + s.A\alpha.$$

133. Corollarium I.

In ſyſtemate duorum punctorum A, B, quae a duabus viribus P, Q ſecundum directiones parallelas AP, BQ ad motum ſollicitentur, jacebit centrum aequilibrii in puncto C rectae AB, ita ut ſit P : Q = BC : AC (121. §.): erit ergo $(P+Q)C\gamma = P.A\alpha + Q.B\beta$ (132. §.), ſeu momentum

tum ſyſtematis duorum punctorum reſpectu dati plani MN aequabitur producto ex ſumma duarum virium in illa puncta agentium in diſtantiam centri aequilibrii ſyſtematis ab eodem plano (130. §.).

134. Corollarium 2.

Sit $n+1$ numerus punctorum a, b, c, d, e, f, - - - p, q alicujus ſyſtematis, in quae totidem vires A, B, C, D, E, F, - - - P, Q agant ſecundum directiones aA, bB, cC, etc. parallelas et in eamdem plagam tendentes, punctum vero α ſit centrum aequilibrii virium A, B, C, - - - P, quarum ſummam denotet K: ſi recta αq ſic ſecetur in β, ut ſit $\alpha\beta:\beta q = Q:K$, adeoque etiam $\alpha\beta:\alpha q = Q:(Q+K)$; erit β centrum aequilibrii omnium $n+1$ virium A, B, C, - - - P, Q (127. §.), demiſſisque ex q, β, α ad datum quodcunque planum MN perpendiculis qq', $\beta\beta'$, $\alpha\alpha'$, fiet $(Q+K)\beta\beta' = K.\alpha\alpha' + Q.qq'$ (133. §.). Quare, ſi $K.\alpha\alpha'$ aequetur ſummae productorum ex n viribus A, B, C, - - - P in diſtantias punctorum a, b, c, - - - p a plano MN, aequabitur $(Q+K)\beta\beta'$ ſummae productorum ex $n+1$ viribus A, B, C, - - - P, Q, quarum ſummam $Q+K$ exprimit, in diſtantias punctorum a, b, c, - - - p, q ab eodem plano MN. Fig. 21.

135. Theorema.

In quolibet ſyſtemate punctorum a totidem viribus ſecundum directiones inter ſe parallelas et in eandem plagam tendentes ad motum ſollicitatorum erit productum ex ſumma omnium virium in diſtantiam communis centri aequilibrii (128. §.) *a quovis plano poſitione dato aequale ſummae momentorum ſingularum virium, adeoque aequale momento totius ſyſtematis* (130. §.) *reſpectu ejusdem plani.*

Demonſtratio.

Verum eſt id de ſyſtemate duorum punctorum (133. §.); et ſi id ſupponatur eſſe verum de ſyſtemate n punctorum, verum erit id eo ipſo etiam de ſyſtemate $n+1$ punctorum (134. §.): debet ergo propoſitum theorema generatim pro quovis poſſibili ſyſtemate punctorum (118. §.) ſubſiſtere (Vol. I. §. 31.).

136. Theorema.

Omne planum mn (23. Fig.) *tranſiens per centrum aequilibrii* γ *dati cujuscunque ſyſtematis* uvxy (118. 128. §.), *dividet totum ſyſtema in duas partes* uvx, uyx, *quarum momenta reſpectu plani* mn *erunt inter ſe aequalia.* Fig. 23.

Quare fieret $G.g\gamma = A.a\alpha - B.b\beta$: ob $G.g\gamma > G.gc$ deberet ergo eſſe $A.a\alpha - B.b\beta > A.ad + B.be$, quod eſt impoſſibile.

138. Theorema.

Si planum $m'n'$ *datum ſyſtema* (118. §.) $uvxyu$ *dividat in duas partes* rvs, rys, *centrum vero aequilibrii totius ſyſtematis jaceat extra planum* $m'n'$ *alicubi in* γ; *erit differentia momenti partis* rys *a momento partis* rvs, *in qua jacet* γ, *reſpectu plani* $m'n'$ *aequalis producto ex ſumma virium totius ſyſtematis* (119. §.) $uvxyu$ *in diſtantiam illius centri aequilibrii* γ *ab eodem plano* $m'n'$.

Demonſtratio.

1. Tranſeat per γ planum mn parallelum plano $m'n'$, quo totum ſyſtema $uvxyu$ in tres partes uvx, $uxsr$, rsy dividatur. Centra aequilibrii harum partium ſint a, b, g, et ad, be, $b\beta$, $g\gamma$ perpendicula ad utrumque planum; A vero, B et G ſint ſummae virium (119. §.) agentium in partes uvx, $uxsr$, rsy ſyſtematis.

2. Erit momentum partis $ruvxs$ reſpectu plani $m'n'$ aequale ſummae $A.ad + B.be$ ob (1) per (135. 131. §.), et $G.gc$. momentum partis rys reſpectu ejusdem plani $m'n'$ (135. §.): differentia horum momentorum erit ergo

$$A.ad + B.be - G.gc =$$
$$= A(\gamma c + a\alpha) + B(\gamma c - b\beta) - G(g\gamma - \gamma c) =$$
$$= (A + B + G)\gamma c + A.a\alpha - (B.b\beta + G.g\gamma).$$

Sed $A.a\alpha$ et $B.b\beta + G.g\gamma$ ſunt momenta partium uvx, uyx reſpectu plani mn, ob (1) per (135. 131. §.), inter ſe aequalia (136. §.): igitur eſt etiam

$$(A.ad + B.be) - G.gc = (A + B + G)\gamma c.$$

139. Theorema.

Si in ſingula puncta a, b, c, d, e, etc. (24. Fig.) *dati cujuscunque ſyſtematis* uvx *plurium punctorum* (118. §.) *agant vel determinatae vires* A, B, C, D, E, etc. *ſecundum directiones* aA, bB, cC, dD, eE *inter ſe parallelas et in eandem plagam tendentes, vel quaecunque aliae vires* A', B', C', D', E', *quae ad priores ſint in certa ratione* $m:n$, *et quidem vel ſecundum priores directiones vel ſecundum alias directiones* aA', bB', cC', dD', eE', Fig. 24.

 inter

inter ſe parallelas et in eandem plagam tendentes; idem erit ſemper centrum aequilibrii totius ſyſtematis.

Demonſtratio.

Secus haberet datum ſyſtema u v x in hypotheſi virium A^1, B^1, C^1, D^1, E^1 unum centrum aequilibrii β diſtinctum a centro aequilibrii α, quod illud in hypotheſi virium A, B, C, D, E debet habere (128. §.), ductoque plano MN ad rectam $\beta\alpha$ ſub angulo βMN inclinato eſſet diſtantia perpendicularis $\alpha\gamma$ centri aequilibrii α minor quam diſtantia $\beta\delta$ centri β a plano MN, quod in aſſumta hypotheſi eſt impoſſibile.

Si enim a^1, b^1, c^1, d^1, e^1 ſint diſtantiae perpendiculares punctorum a, b, c, d, e a plano MN; deberet eſſe per (135. 130. §.)

$$(A+B+C+D+E)\,\alpha\gamma = A.a^1 + B.b^1 + C.c^1 + D.d^1 + E.e^1;$$

$$(A^1+B^1+C^1+D^1+E^1)\,\beta\delta = A^1.a^1 + B^1.b^1 + C^1.c^1 + D^1.d^1 + E^1.e^1.$$

Cum vero per hypotheſim ſit $A^1 : A = m : n$, conſequenter $A^1 = A\frac{m}{n}$, et ſic $B^1 = B\frac{m}{n}$, $C^1 = C\frac{m}{n}$, $D^1 = D\frac{m}{n}$, $E^1 = E\frac{m}{n}$; abibit, facta ſubſtitutione, ſecunda aequatio in ſequentem

$$(A+B+C+D+E)\,\beta\delta = A.a^1 + B.b^1 + C.c^1 + D.d^1 + E.e^1.$$

Ex hac vero et prima aequatione evidenter ſequitur, debere eſſe $\alpha\gamma = \beta\delta$, adeoque impoſſibile eſſe, ut fiat $\alpha\gamma < \beta\delta$.

DISSERTATIO V.

DE CENTRO GRAVITATIS IN GENERE.

140. Definitio.

Dum vires ſingula puncta certi ſyſtematis (118. §.) directionibus inter ſe parallelis et in eandem plagam tendentibus ad motum ſollicitantes a gravitate proveniunt (39. §.), centrum aequilibrii ejusdem ſyſtematis vocatur *centrum gravitatis*.

141. Corollarium 1.

Pondera e totidem punctis alicujus rectae libere pendentia ſpectari debent inſtar virium in eadem puncta ſecundum directiones inter ſe parallelas agentium (42. 43. §.), ſic, ut, quaecunque in praecedente diſſertatione de ejusmodi virium centro aequilibrii generatim ſunt demonſtrata, etiam ad centrum gravitatis talium ponderum debeant extendi (140. §.).

142. Corollarium 2.

Quamobrem jacebit centrum gravitatis duorum ponderum aequalium P, Q e punctis a, b (25. Fig.) datae rectae bD libere pendentium in medio puncto C inter a et b (141. 122. §.). Fig. 25.

143. Corollarium 3.

Quodſi autem pondera P, Q fuerint inaequalia; debebit illorum centrum gravitatis coincidere cum puncto C rectae ab, ſi hoc ita determinetur, ut ſit $P:Q = bC:aC$ (141. 121. §.).

144. Corollarium 4.

Erit porro diſtantia centri gravitatis C duorum ponderum P, Q ab alterutro puncto ſuſpenſionis (a vel b) aequalis producto ex recta ab in pondus (Q vel P) pendens ex altero puncto ſuſpenſionis (b vel a) diviſo per ſummam ponderum P, Q (141. 123. §.).

E. gr. Sit recta $ab = 7$ pedibus, quaeraturque centrum gravitatis C ponderum $P = 6$ ℔, $Q = 15$ ℔; erit

aC

$$aC = \frac{7.15}{6+15} = 5 \text{ pedibus};$$

$$bC = \frac{7.6}{6+15} = 2 \text{ pedibus}.$$

145. Corollarium 5.

Et diſtantia centri gravitatis C duorum ponderum P, Q a dato quocunque in recta bD puncto d aequabitur ſummae productorum ex diſtantiis ſingulorum punctorum ſuſpenſionis a, b a puncto d in pondera ex illis pendentia diviſae per ſummam ponderum (141. 124. §.).

E. gr. Detur punctum d in diſtantiis da = 3 pedibus, db = 10 pedibus a punctis a, b, et quaeratur centrum gravitatis C ponderum P = 15 ℔, Q = 5 ℔; jacebit illud in diſtantia a puncto d

$$dC = \frac{3.15+10.5}{15+5} = 4\tfrac{1}{4} \text{ ped.}$$

146. Corollarium 6.

Fig. 26. Et generatim quotcunque pondera A, B, C, - - - P, Q e totidem punctis, a, b, c, - - - p, q datae rectae aZ libere pendeant, habebunt illa commune centrum gravitatis in puncto β ejusdem rectae ita determinato, ut illius diſtantia $Z\beta$ a dato quocunque in eadem recta puncto Z aequetur ſummae productorum ex diſtantiis Za, Zb, Zc, - - - Zp, Zq ſingulorum punctorum ſuſpenſionis a puncto Z in ipſa pondera ex illis pendentia diviſae per ſummam omnium ponderum: preſſio vero, quam centrum β directione verticali βy ab omnibus ponderibus perſentiſcet, aequabitur preſſioni, quam in illo unicum pondus S ſummae omnium ponderum aequale ex β libere pendens produceret (141. 126. §.).

147. Definitio.

Omnis maſſa gravis, linea, ſuperficies, et corpus determinatae figurae, poteſt ſpectari inſtar unius ſyſtematis plurium punctorum materialium (118. §.): preſſiones aequales, quae in ſingulis punctis ſecundum directiones verticales inter ſe parallelas in quovis maſſae ſitu deorſum tendentes a vi gravitatis producuntur (41. 42. §.), licebit inſtar totidem virium aequalium conſiderare: producta ex his viribus in diſtantias perpendiculares punctorum, in quae illae agunt, a dato plano erunt *Momenta* earundem virium reſpectu dati plani, et ſumma omnium momentorum

dabit

dabit *Momentum* totius maſſae gravis reſpectu ejusdem plani (130. §.): ſumma demum omnium virium aequalium in puncta maſſae agentium erit pondus totius maſſae (45. §.).

148. Corollarium 1.

Omnis maſſa gravis uvx (27. Fig.) habebit aliquod idque unicum centrum gravitatis C: ſi in hoc directione verticali oppoſita CV cogitetur agere vis V aequalis ponderi totius maſſae uvx; vel ſi, abſente vi V, maſſa uvx in centro C ita cogitetur figi, ut illa, quin circa C convertatur, moveri nequeat; debebit utroque caſu tota maſſa uvx in aequilibrio ſervari: unde neceſſario ſequitur, preſſionem, quam gravitas in centro C directione verticali Cy producit, aequari preſſioni, quam in illo vis una y ponderi maſſae uvx aequalis produceret (141. 128. 129. §). Fig. 27.

149. Corollarium 2.

Poteſt ergo omne ſyſtema plurium maſſarum gravium ſpectari inſtar unius ſyſtematis totidem punctorum, cum centris gravitatis illarum maſſarum coincidentium, quae a viribus per pondera earundem maſſarum determinatis ſecundum directiones verticales deorſum ad motum debent urgeri (148. 118. §.): omne itaque ſyſtema plurium maſſarum gravium habebit aliquod idque unicum centrum gravitatis (140. 128. 129. §.), quod tanta efficacia directione verticali deorſum premetur ac ſi ex illo unum pondus aequale ſummae ponderum omnium maſſarum totum ſyſtema conſtituentium libere penderet: momentum cujusvis talis maſſae reſpectu dati plani erit productum ex diſtantia centri gravitatis ejusdem maſſae in illius pondus, et ſumma momentorum omnium maſſarum dabit momentum totius ſyſtematis reſpectu dati plani (130. §.).

150. Corollarium 3.

Momentum cujuslibet maſſae gravis uvx reſpectu cujuscunque plani mn erit aequale producto ex pondere ejusdem maſſae, ſeu ipſa maſſa ei proportionali (52. §.), in diſtantiam perpendicularem Cc ejus centri gravitatis C (148. §.) ab eodem plano (140. 147. 135. §).

151. Corollarium 4.

Et momentum cujusvis ſyſtematis plurium maſſarum gravium (149. §.) reſpectu dati plani aequabitur producto ex ſumma ponderum omnium

maſſarum in diſtantiam perpendicularem centri gravitatis totius ſyſtematis ab eodem plano (149. 140. 135. §.).

152. Corollarium 5.

Si in ſingula puncta datae maſſae gravis M cogitentur agere vires aequales independentes a gravitate ſecundum quaecunque directiones in quovis maſſae M ſitu inter ſe parallelas et in eandem plagam tendentes; erit commune centrum aequilibrii omnium harum virium idem cum centro gravitatis maſſae gravis M (141. 147. 139. §.).

153. Corollarium 6.

Et ſi, dato quocunque ſyſtemate plurium maſſarum gravium A, B, C, --- P, Q, in centra gravitatis ſingularum maſſarum (148. §.) agant quaecunque vires A^{1}, B^{1}, C^{1}, --- P^{1}, Q^{1}, ponderibus illarum maſſarum proportionales, ſecundum directiones in quovis ſitu ſyſtematis inter ſe parallelas et in eandem plagam tendentes, ſeu illae verticales ſint, ſeu a verticalibus utcunque declinent; erit centrum aequilibrii omnium virium A^{1}, B^{1}, C^{1}, --- P^{1}, Q^{1} idem cum centro gravitatis ſyſtematis maſſarum gravium A, B, C, --- P, Q (149. 140. 139. §.).

154. Corollarium 7.

Fig. 28. Centrum gravitatis ſyſtematis duarum maſſarum gravium A, B (28. Fig.), quarum centra gravitatis z, x aliunde ſint nota, jacebit in rectae xz puncto a, quod, data mutua centrorum x, z diſtantia xz, determinabitur ob (149. §.), ſi recta xz ſecetur in a in ratione inverſa ponderum, vel maſſarum A, B illis proportionalium (121. §.), vel per (123. §.) definiatur ejus diſtantia ab alterutro centro x, z, aut ab alio quocunque puncto u dato in recta xz per (124. §.), quo fiat

$$ax : az = Z : X;$$

$$az = \frac{xz . X}{X + Z}; \quad ax = \frac{xz . Z}{X + Z};$$

$$au = \frac{xu . X + zu . Z}{X + Z}.$$

155. Corollarium 8.

Ex (154. §.) naſcentur ſequentes formulae, ope quarum, dato centro gravitatis a unius ſyſtematis duarum maſſarum gravium A, B, datoque centro

tro gravitatis z vel x alterutrius maſſae, centrum gravitatis alterius maſ-ſae in recta ux transeunte per data centra poterit determinari.

Si datis a, x quaeratur z.

$$az = \frac{ax.X}{Z}; \quad xz = \frac{ax(X+Z)}{Z};$$

$$uz = \frac{ua.Z - ax.X}{Z} = \frac{ua(X+Z) - ux.X}{Z}.$$

Si datis a, z quaeratur x.

$$ax = \frac{az.Z}{X}; \quad zx = \frac{az(X+Z)}{X};$$

$$ux = \frac{ua.X + az.Z}{X} = \frac{ua(X+Z) - uz.Z}{X}.$$

156. Corollarium 9.

Quodſi autem detur ſyſtema numero n+1 maſſarum gravium A, B, C, - - - P, Q (21. Fig.) ſuis ponderibus proportionalium, quarum centra gravitatis a, b, c, - - - p, q nota ſint, noſcaturque commune centrum gravitatis α n maſſarum A, B, C, - - - P; invenietur centrum gravitatis omnium n+1 maſſarum A, B, C, - - - P, Q in puncto β rectae αq, ſi ob (149. 140. 127. §.) fiat Fig. 21.

$$\alpha\beta = \frac{\alpha q.Q}{A+B+C+ - - - +P+Q}.$$

157. Corollarium 10.

Hinc (154. 156. §.) per ſe manifeſtum fit, qua methodo centrum gravitatis cujuslibet ſyſtematis plurium maſſarum gravium inveſtigare liceat, datis centris gravitatis et ponderibus ſingularum maſſarum (148. §.).

Sic, ſi e. gr. detur ſiſtema quinque maſſarum gravium A, B, C, D, E ſuis ponderibus proportionalium, quarum centra gravitatis in a, b, c, d, e ſita ſint, ducta recta ab, eademque in l ita ſecta, ut ſit Fig. 19.

$$al = \frac{ab.B}{A+B};$$

erit l centrum gravitatis maſſarum A, B (154. §.). Si jam ex hoc ad c ducatur recta lc, tum determinetur

$$lm = \frac{lc.C}{A+B+C};$$

erit m commune centrum gravitatis trium maſſarum A, B, C (156. §.).
Si porro ex m ad d ducatur recta m d, deinde quaeratur

$$mn = \frac{md.D}{A+B+C+D};$$

erit n commune centrum gravitatis quatuor maſſarum A, B, C, D (156. §.).
Si demum ex n ad e ducatur recta n e, et determinetur

$$no = \frac{ne.E}{A+B+C+D+E};$$

erit o commune centrum gravitatis quinque maſſarum A, B, C, D, E (156. §.).

158. Definitio.

Planum gravitatis datae maſſae gravis, vel *Diameter gravitatis*, eſt planum vel linea recta tranſiens per centrum gravitatis ejusdem maſſae (148. §.).

159. Corollarium 1.

Innumera poſſunt duci plana gravitatis, et innumerae diametri gravitatis in qualibet maſſa gravi (158. §.).

160. Corollarium 2.

Omnes diametri gravitatis cujuslibet maſſae gravis (159. §.) interſecant ſe in ejus centro gravitatis (158. 148. §.).

161. Corollarium 3.

Communis interſectio duorum planorum gravitatis datae cujuscunque maſſae gravis erit diameter gravitatis ejusdem maſſae (158. §.).

162. Corollarium 4.

Et ſi diameter gravitatis alicujus maſſae ſecetur a plano gravitatis ejusdem maſſae, erit interſectio illius centrum gravitatis (158. §.).

163. Corollarium 5.

Omne planum gravitatis vel unius maſſae gravis M, vel certi ſyſtematis S plurium maſſarum gravium, dividet totam maſſam M, vel totum ſyſtema S in duas partes, quarum momenta reſpectu ejusdem plani erunt inter ſe aequalia (158. 149. 147. 136. §.).

164. Corollarium 6.

Et viciſſim omne planum datam maſſam gravem M, vel datum ſyſtema S plurium maſſarum gravium in duas partes dirimens, quarum momenta

menta reſpectu ejusdem plani ſint inter ſe aequalia, erit unum planum gravitatis ejusdem maſſae M vel ſyſtematis S (149. 147. 137. 158. §.).

165. Corollarium 7.

Si vero planum mn (27. Fig.) datam maſſam gravem uvx in duas partes rus, rvxs dirimat, quin id transeat per centrum gravitatis C maſſae uvx; erunt momenta partium rus, rvxs reſpectu plani mn inaequalia, et differentia momenti partis rus a momento partis rvxs, in qua jacet centrum gravitatis C maſſae uvx, aequabitur producto ex pondere totius maſſae uvx in diſtantiam Cc centri gravitatis C a plano mn (148. 147. 138. §.). Fig. 27.

166. Corollarium 8.

Ex (164. §.) demum colliges, quod ſi omnia puncta alicujus maſſae gravis in uno plano jaceant, hoc ipſum planum debeat eſſe unum planum gravitatis talis maſſae: momenta enim partium, in quas maſſa ab ejusmodi plano dirimitur, aequantur nihilo (147. §.).

167. Hypotheſis.

In inveſtigatione centrorum gravitatis ſumantur omnes maſſae, lineae, ſuperficies, et corpora, pro aequabiliter denſis et homogeneis, quo fiat, ut tam maſſae, quam pondera illis proportionalia, per volumina, ſub quibus continentur, poſſint exprimi.

Scholion.

Si enim generatim ſit P pondus maſſae M ſub volumine V contentae, et p pondus talis maſſae contentae ſub determinato quopiam volumine v, puta uno pede cubico; erit $P:p = V:v$ (51. §.), hinc $P = p\frac{V}{v}$. Quamobrem licebit ponere $P = V$, modo per V intelligatur exponens rationis voluminis V, ſub quo pondus P continetur, ad volumen determinatum v, ſub quo continetur pondus p pro menſura prioris aſſumtum, ita ut V in $P = V$ numerum concretum ad unitatem $= p$ relatum exprimat (15. 18. §.). Hoc ſenſu poterit maſſa et pondus cujuslibet lineae gravis per ejus longitudinem; maſſa vero et pondus cujusvis ſuperficiei gravis per ipſam ſuperficiem geometrice determinatam, et maſſa pondusque dati cujuscunque corporis per ejus volumen exprimi. Sic e. gr. in inveſtigatione centri gravitatis coni, cujus altitudo a, et area baſeos b data ſit, licebit ipſius

maſſam et pondus ei proportionale per volumen $\frac{ab}{3}$ exprimere. Nullae quidem extant lineae graves aut ſuperficies; nihil tamen obſtat, quominus tales cogitari poſſint: ſicut autem proprietates maſſarum homogenearum et aequabiliter denſarum in prima diſſertatione expoſitae inſignem uſum habent in practicis diſquiſitionibus, licet ejusmodi maſſae nuſpiam extent; ſic etiam inveſtigatio centri gravitatis talium maſſarum amplum habebit uſum in diſquiſitionibus mechanicis.

168. Problema.

Dato momento μ datae cujuscunque maſſae gravis M reſpectu plani poſitione dati; invenire diſtantiam D centri gravitatis maſſae M ab eodem plano.

Solutio.

Cum ſit $\mu = MD$ (150. §.); erit $D = \frac{\mu}{M}$, id eſt: momentum datae maſſae gravis reſpectu plani poſitione dati diviſum per ipſam maſſam dabit diſtantiam ejus centri gravitatis ab eodem plano.

169. Problema.

Exponere methodum, qua momentum alicujus maſſae gravis reſpectu plani poſitione dati liceat inveſtigare.

Solutio.

Fig. 30. 1. Imaginemur nobis in (30. Fig.) quamcunque lineam curvam, vel ſuperficiem, aut corpus grave ABCDEA: MN vero ſit datum planum, reſpectu cujus determinare oporteat momentum illius maſſae.

2. Sumta ad arbitrium linea abſciſſarum PQ perpendiculari ad planum MN, fixaque abſciſſarum origine in puncto P, capiatur abſciſſa $x = Pa$, et per punctum a cogitetur duci planum ap parallelum plano MN: abſcindet ap ex tota maſſa ABCDEA partem pAq, cujus magnitudo pendebit a longitudine abſciſſae $x = Pa$. Supponamus itaque, poſſibiles eſſe duas functiones m, μ variabilis abſciſſae x, quarum prior m maſſam pAq, et poſterior μ momentum ejusdem maſſae reſpectu plani MN exprimat.

3. Quodſi jam abſciſſa $x = Pa$ abeat in $Pb = x + \Delta x$ pro $ab = \Delta x$ et per punctum b tranſeat planum br parallelum plano MN; abibit functio $m = pAq$ (1) in novam functionem $m^{I} = pAq + pqsr$,

et

et functio μ exprimens momentum maſſae $m = pAq$ abibit in certam functionem μ^1 expreſſuram momentum maſſae rAs aequale ſummae momentorum illius partium pAq, $pqsr$ reſpectu plani MN (147. §.).

4. In (3) erit itaque $\Delta m = m^1 - m$ functio aequalis maſſae $pqsr$ inter plana pa, rb parallela interceptae, et $\Delta\mu = \mu^1 - \mu$ functio aequalis momento maſſae $\Delta m = pqsr$ reſpectu plani MN (Vol. I. §. 18).

5. Ignoramus quidem, in quonam puncto centrum gravitatis maſſae $pqsr = \Delta m$ inter plana pq, rs interceptae jaceat: facile tamen quisque per ſe perſpiciet, cur illud cum certo puncto c ſito inter plana pq, rs debeat coincidere, ita ut illius diſtantia cd a plano MN major ſit quam bQ, et ſimul minor quam aQ. Cum ergo momentum $\Delta\mu$ maſſae $\Delta m = pqsr$ debeat eſſe $\Delta\mu = \Delta m . cd$ (135. §.); erit ſemper

$$\Delta\mu > \Delta m . bQ \text{ et } \Delta\mu < \Delta m . aQ.$$

Hinc pro linea abſciſſarum $PQ = a$, proinde $aQ = a - x$, et $bQ = a - (x + \Delta x)$ fiet

$$\Delta\mu > \Delta m (a - x - \Delta x);\ \Delta\mu < \Delta m (a - x).$$

6. Verum, ſi re ipſa eſt poſſibilis aliqua functio m variabilis x, quae maſſam pAq exprimat (2), debet pro ejus differentia dari expreſſio formae $\Delta m = \partial m \Delta x + e\Delta x^2 + f\Delta x^3 +$ etc. (Vol. I. §. 84): eapropter erit in (5)

$$\frac{\Delta\mu}{\Delta x} > (a-x)\partial m \begin{array}{l} +(a-x)(e\Delta x + f\Delta x^2 + \text{etc.}) \\ -(\partial m . \Delta x + e\Delta x^2 + f\Delta x^3 + \text{etc.}) \end{array}$$

$$\frac{\Delta\mu}{\Delta x} < (a-x)\partial m + (a-x)(e\Delta x + f\Delta x^2 + \text{etc.})$$

Et ideo erit exponens rationis differentialis functionis μ per (Vol. I. §. 131.)

$$\partial\mu = (a - x)\partial m.$$

7. Quodſi ergo poſſibile fuerit, ∂m per x et ∂x determinare, poterit quoque $\partial\mu$ per x et ∂x definiri, tum ope calculi integralis determinari momentum μ maſſae $m = pAq$ reſpectu plani MN. Si porro notus fuerit valor abſciſſae $x = Pa$, pro quo maſſa $m = pAq$ abeat in maſſam ACD, puta valor $x = Pe$, ſubſtituto hoc valore loco x in functione μ, obtinebitur momentum totius maſſae $ABCDEA$ reſpectu dati plani MN.

Scholion.

Idem problema in ſyſtemate infiniteſimaliſtarum poteſt hoc modo ſolvi. Si ſectioni pq cogitetur infinite vicina ſectio rs, ut $ab = dx$ ſit infinite parvum incrementum variabilis $x = Pa$; erit $dm = pqsr$ infinite parvum incrementum maſſae $m = pAq$, et illius momentum reſpectu plani MN aequabitur infinite parvo incremento $d\mu$ momenti μ maſſae pAq reſpectu ejusdem plani: cum ergo in hac hypotheſi centrum gravitatis maſſae pqsr adeo vicinum debeat eſſe ſectioni pq, ut differentia inter illius diſtantiam a plano MN et diſtantiam $aQ = a - x$ ſit infinite parva, proinde nulla; erit momentum $d\mu$ aequale producto ex maſſa dm in diſtantiam $a - x$ (135. §.), id eſt, $d\mu = (a - x)\, dm$.

170. Corollarium 1.

Sumta origine abſciſſarum in Q, poſitaque abſciſſa $Qa = z$, ut fiat $a - x = z$; erit maſſa $m = pAq$ certa functio variabilis z, ejus autem momentum μ reſpectu plani MN dabit $\varepsilon\mu = z\varepsilon m$ (169. §.), ubi jam exponens differentialis εm ſumendus erit cum ſignis contrariis, cum creſcente variabili $z = Qa$ verſus P decreſcat maſſa $m = pAq$, ejusque momentum μ (Vol. I. §. 132.).

171. Corollarium 2.

Pars reſidua maſſae ABCDEA ſit $M = pqCDp$, adeoque $M = ABCDEA - m$; erit $\varepsilon M = -\varepsilon m$. Praeterea denotet K momentum maſſae ABCDEA et k momentum maſſae $pqCDp = M$ reſpectu plani MN, quo fiat $k = K - \mu$; erit quoque $\varepsilon k = -\varepsilon\mu$. Quare ob (169. 170. §.) habebimus ſequentes expreſſiones pro exponente rationis differentialis momenti ſtatici k maſſae $M = pqCDp$ reſpectu plani MN, in quarum prima ſumetur εM cum ſignis contrariis, cum creſcente variabili $x = Pa$ decreſcat maſſa $M = pqCDp$, ejusque momentum k.

$$\varepsilon k = (a - x)\,\varepsilon M; \quad \varepsilon k = z\,\varepsilon M.$$

172. Corollarium 3.

Haec principia offerunt methodum univerſalem inveſtigandi centrum gravitatis datae cujusvis lineae curvae et ſuperficiei, quae tota in uno plano jaceat. Sit enim ABCDA ejusmodi vel linea curva, vel ſuperficies plana; neceſſe eſt, ut illius centrum gravitatis jaceat in plano ipſius curvae vel ſuperficiei (166. 158. §.): quare cogitentur duo plana ad planum, in quo ABCDEA jacet, perpendicularia, illud in MN, MR, et ſeſe

ſub

ſub angulo recto RMN interſecantia, quo fiat, ut diſtantiae centri gravitatis maſſae ABCDEA ab iisdem planis aequentur diſtantiis illius a rectis MN, MR exhibentibus interſectiones eorundem planorum cum plano, in quo jacet ABCDEA. Quodſi jam per (169. 170. 171. §.) determines momenta curvae lineae, vel ſuperficiei ABCDEA reſpectu planorum per MN, MR ductorum, eaque dividas per maſſam ABCDEA vel datam, vel quacunque methodo inventam; invenies diſtantias centri gravitatis a rectis MN, MR (168. §.), atque per has erit ſitus centri gravitatis perfecte determinatus. Fac enim diſtantiam illius a recta MN eſſe = S, et diſtantiam a recta MR inventam eſſe = s; ſumta Mf = S et Md = s, ductisque ex f, d ad MR, MN perpendicularibus fc, dc in c ſeſe interſecantibus: erit c quaeſitum centrum gravitatis.

173. Corollarium 4.

Ubi autem inveſtigandum fuerit centrum gravitatis vel alicujus corporis, vel cujuspiam lineae curvae aut ſuperficiei, quae non tota in uno plano jaceat; licebit totam ad tria plana ſeſe ſub angulis rectis interſecantia referre, tum momenta reſpectu ſingulorum planorum per (169. 170. 171. §.) quaerere: ſi enim haec per datam vel quacunque ratione determinatam maſſam dati corporis, aut datae lineae curvae vel ſuperficiei dividantur, obtinebuntur diſtantiae illius centri gravitatis a ſingulis planis (168. §.), et per has erit idem centrum perfecte determinatum.

Scholion.

In multis tamen iisque maxime memorabilibus caſibus facile una diametrorum gravitatis datae maſſae cognoſcitur, quo ipſo inveſtigatio centri gravitatis compendioſior redditur. Perſaepe porro occurrunt tales maſſae, quarum centra gravitatis per data centra aliarum maſſarum ſecundum principia ſuperius expoſita (154. 155. 157. §.) poſſunt determinari, quin ſit neceſſarium ad praecedentem methodum, aut aliam illi ſimilem refugere. Utrumque in ſequentibus diſſertationibus pluribus exemplis illuſtrabitur: multa horum exemplorum exhibent caſus, qui in practicis diſquiſitionibus frequenter poſſunt occurrere: reliqua id habent utilitatis, quod tyronibus uberrimum campum ſeſe in adplicatione principiorum calculi differentio-integralis in primo horum opuſculorum volumine expoſitis aperiant.

DISSERTATIO VI.

DE INVESTIGATIONE CENTRI GRAVITATIS LINEARUM ET PLANORUM GRAVIUM.

174. Problema.

Fig. 6. *Invenire centrum gravitatis datae lineae rectae* AB (6. Fig.).

Solutio.

Biſſecetur data recta AB in puncto C; erit C illius centrum gravitatis.

Demonſtratio.

Cum enim ſingula puncta rectae AB pari efficacia ſecundum directiones verticales inter ſe parallelas deorſum a vi gravitatis premantur; neceſſe eſt, ut, ſi vis una V aequalis ponderi totius rectae AB (167. §.) ſecundum directionem verticalem CV oppoſitam directioni gravitatis in punctum medium C ejusdem rectae agere cogitetur, ea rectam AB ſervet in aequilibrio (120. §.): punctum ergo C eſt centrum gravitatis rectae AB (140. 119. §.).

175. Theorema.

Fig. 31. *Si recta* QC *ſit axis datae curvae* XQZ (31. Fig.), *et* XZ *chorda ad axem perpendicularis; jacebit in* QC *centrum gravitatis arcus* XQZ, *ſeu* QC *erit diameter gravitatis hujus arcus* (158. §.).

Demonſtratio.

Ex quocunque puncto a axeos QC ducatur chorda pq ad illum perpendicularis, debebit haec biſſecari in a (Vol. I. §. 438.); pro quovis idcirco puncto gravi alterutrius arcus QX, QZ dabitur unum punctum grave in altero arcu, cujus diſtantia perpendicularis ab axe QC aequetur diſtantiae perpendiculari prioris puncti ab eodem axe: quodſi ergo cogitetur planum LK per axem QC tranſiens et ad planum, in quo totus arcus XQZ jacere ſupponitur, perpendiculare; erit ſumma momentorum ſingulorum punctorum gravium arcus QX reſpectu plani LK, aequalis ſummae

ſummae momentorum ſingulorum punctorum gravium arcus QZ reſpectu plani LK, proinde etiam momentum totius arcus QX aequabitur momento arcus QZ (147. §.). Planum KL erit ergo planum gravitatis arcus XQZ (164. §.): quare, cum etiam planum, in quo totus arcus XQZ jacet, ſit unum planum gravitatis ejusdem arcus (166. §.); erit eo ipſo axis QC diameter gravitatis hujus arcus (161. §.).

176. Problema.

Data aequatione ad curvam quamcunque XQZ *inter abſciſſas* $z = Qa$ *in curvae axe* QC *jacentes et ordinatas orthogonas* $y = pa$; *invenire centrum gravitatis arcus* pQq *ſubtenſi a chorda* pq *perpendiculari ad axem* QC.

Solutio.

1. Centrum gravitatis arcus pQq debet coincidere cum uno puncto γ axeos QC (175. §.), quod idcirco determinabitur inventa ejus diſtantia $Q\gamma$ a curvae vertice Q.

2. Quamobrem ſit arcus $pQ = \varphi$, $pQq = M = 2\varphi$, et μ momentum arcus M reſpectu plani MN perpendicularis in Q ad planum curvae XQZ axemque QC; erit

$$\partial M = 2\partial\varphi = 2\sqrt{(\partial y^2 + \partial z^2)} \text{ per (Vol. I. §. 469.);}$$
$$\partial\mu = z\partial M = 2z\sqrt{(\partial y^2 + \partial z^2)} \text{ per (171. §.).}$$

3. Porro clarum eſt, tam maſſam $M = pQq$, quam ejus momentum μ reſpectu plani MN debere aequari nihilo, ſi fiat $z = Qa = 0$: formulae ergo differentiales in (2) debebunt dare integralia M, μ ſingula $= 0$ pro $z = 0$, unde conſtantium inventio pendet (Vol. I. §. 238.).

4. Quodſi autem integralia M, μ perfecte fuerint determinata, determinabitur per illa etiam diſtantia $Q\gamma$ (1) centri gravitatis γ a puncto Q, nimirum $Q\gamma = \frac{\mu}{M}$ (168. §.), cujus generalis expreſſio erit hoc caſu

$$Q\gamma = \frac{\int z\sqrt{(\partial y^2 + \partial z^2)}}{\int\sqrt{(\partial y^2 + \partial z^2)}}.$$

177. Corollarium 1.

Sit pQq arcus circuli ex centro C radio $CQ = r$ deſcripti; debebit ejus centrum gravitatis γ jacere in radio CQ biſſecante tam chordam $pq = 2y$, quam arcum pQq; illius autem diſtantia $Q\gamma$ a puncto Q in-

 venietur

venietur hoc modo. Pro momento μ arcus $pQq = M$ reſpectu plani MN, et $z = Qa$, adeoque $y^2 = 2rz - z^2$ fiet:

$$\varepsilon y = \frac{(r-z)\varepsilon z}{y}; \quad \text{hinc } z\varepsilon z = r\varepsilon z - y\varepsilon y;$$

$$\sqrt{(\varepsilon y^2 + \varepsilon z^2)} = \frac{r\varepsilon z}{y}:$$

igitur erit per (176. §. 3. n.)

$$\varepsilon M = \frac{2r\varepsilon z}{y}; \quad \varepsilon\mu = \frac{2rz\varepsilon z}{y} = r\varepsilon M - 2r\varepsilon y;$$

hinc $\mu = rM - 2ry$ pro $M = pQq$.

Per (176. §. 4. n.) habebimus:

$$Q\gamma = \frac{\mu}{M} = r - \frac{2ry}{M}.$$

178. Corollarium 2.

Diſtantia centri gravitatis γ arcus circularis pQq, ab hujus centro magnitudinis C erit $C\gamma = CQ - Q\gamma$: igitur per (177. §.) $C\gamma = \frac{2ry}{pQq}$, hinc $pQq : pq = CQ : C\gamma$, id eſt: Diſtantia centri gravitatis γ arcus circularis pQq eſt quarta geometrice proportionalis ad arcum, ejus chordam, et radium.

179. Corollarium 3.

Poſita chorda $2y = pq = XZ = 2r$, abibit arcus circularis pQq in ſemiperipheriam $XQZ = r\pi$, denotante $1 : \pi$ rationem radii ad ſemiperipheriam (Vol. I. §. 5. Schol.), quem ſignificatum pro π ubique in ſequentibus retinebimus: diſtantia centri gravitatis γ ſemiperipheriae circularis XQZ ab hujus centro magnitudinis C debet ergo aequari duplo quadrato radii diviſo per ipſam ſemiperipheriam, ſeu radio ducto in numerum $\frac{2}{\pi}$, nimirum erit (178. §.)

$$C\gamma = \frac{2r^2}{XQZ} = \frac{2r}{\pi}.$$

Et pro integra peripheria M circuli, quo caſu fit chorda $2y = 0$, erit in (177. §.) $Q\gamma = r$, id eſt: centrum gravitatis peripheriae circularis coincidit cum ejus centro magnitudinis.

180. Corollarium 5.

Hac ratione poterit ſolutio praecedentis problematis ad alias quoque curvas adplicari. Sit pQq arcus parabolae, ad quam eſt aequatio $y^2 = pz$ (Vol. I. §. 508.); erit

$$2y\,\partial y = p\,\partial z;\ \partial y = \frac{p\,\partial z}{2y} = \frac{p^{\frac{1}{2}}\,\partial z}{2z^{\frac{1}{2}}};$$

$$\sqrt{(\partial y^2 + \partial z^2)} = \frac{\partial z}{2z^{\frac{1}{2}}}\sqrt{(p+4z)}.$$

Adeoque per (176. §. 2. n.) fiet

$$\partial M = \frac{\partial z}{2z^{\frac{1}{2}}}\sqrt{(p+4z)};\ \partial\mu = \frac{z^{\frac{1}{2}}\,\partial z}{2}\sqrt{(p+4z)}.$$

Quamobrem, ſi capias integralia algebraico-logarithmica M, μ per (Vol. I. §. 303. 289.), quantitatesque conſtantes juxta (176. §. 3. n.) determines; obtinebis diſtantiam $Q\gamma = \frac{\mu}{M}$ centri gravitatis γ arcus parabolici pQq ab ejus vertice Q.

181. Corollarium 6.

Sic quoque, ſi pQq ſit arcus ellipſeos vel hyperbolae, determinetur ∂y ex aequatione $y^2 = pz - \frac{pz^2}{a}$ vel $y^2 = pz + \frac{pz^2}{a}$ (Vol. I. §. 540. 564.), tum, ſubſtituto eo valore loco ∂y in (176. §. 2. n.), quaerantur integralia, μ, M per (176. §. 3. n.): erit enim $Q\gamma = \frac{\mu}{M}$ diſtantia centri gravitatis arcus pQq ellipſeos vel hyperbolae ab ejusdem vertice Q (176. §. 4. n.).

182. Corollarium 7.

Pro arcu M = pQq (32. Fig.) cycloidis erit $\partial y = \partial z\sqrt{\frac{2r-z}{z}}$ Fig. 32. (Vol. I. §. 609.): igitur fiet in (176. §. 2. n.)

$$\partial M = 2\partial z\sqrt{\frac{2r}{z}};\qquad \partial\mu = 2z\,\partial z\sqrt{\frac{2r}{z}}.$$

Quamobrem integrando per (176. §. 3. n.) inveniemus

$$M = 4\sqrt{2rz};\qquad \mu = \tfrac{4}{3}\sqrt{2rz^3}.$$

Diſtantia centri gravitatis γ arcus pQq cycloidis a vertice Q pro quavis abſciſſa z=Qa erit ergo ob (176. §. 4. n.) $Q\gamma = \frac{\mu}{M} = \frac{1}{3} z$; unde pro z=Qc=2r reperietur diſtantia centri gravitatis γ totius cycloidis XQZ, nimirum $Q\gamma = \frac{2}{3} r$, ſeu aequalis duabus tertiis partibus radii r=Qc circuli genitoris.

183. Theorema.

Fig. 33. *Si centra gravitatis* e, - - - a, b, - - - x (33. Fig.) *omnium in dato plano vel corpore gravi* ApCqA *cogitabilium et inter ſe parallelarum ſectionum* df, - - - pq, rs, - - - uv *in una recta* AC *jaceant; jacebit quoque in eadem recta centrum gravitatis totius plani vel corporis* ApCqA, *adeoque* AC *erit illius diameter gravitatis* (158. §.).

1. Sit mn unum planum, in quo jaceat recta AC: erit mn commune planum gravitatis ſingularum ſectionum gravium df, - - - pq, rs, - - - - uv inter ſe parallelarum, quae in dato plano vel corpore ApCqA poſſunt cogitari (158. §.); ſingulaeque ſectiones dividentur ab eodem plano in partes de et ef, - - - pa et aq, rb et bs, - - - ux et xv, quarum quaevis binae inter ſe habebunt aequalia momenta reſpectu plani mn (163. §.): igitur erit ſumma momentorum ex parte AqC plani mn aequalis ſummae momentorum ex parte oppoſita ApC, ſeu planum mn dirimet datum planum vel corpus ApCqA in duas partes, quarum momenta reſpectu ejusdem plani erunt inter ſe aequalia (147. §.).

2. Quotcunque igitur plana mn, quarum communis interſectio ſit recta AC, cogitentur tranſire per datum planum vel corpus grave ApCq; erit quodvis illorum unum planum gravitatis maſſae ApCqA ob (1) per (164. §.), eoque ipſo eſt recta AC una diameter gravitatis ejusdem maſſae (161. §.).

184. Problema.

Fig. 34. *Invenire centrum gravitatis dati cujuscunque trianguli rectilinei* ABC (34. Fig.).

Solutio.

Biſſectis duobus lateribus AC, BC in b, a, ducantur ex verticibus B, A angulorum oppoſitorum rectae Bb, Aa; debebit recta Bb quamlibet cogitabilem ſectionem trianguli ABC lateri AC parallelam, et Aa quamvis ejus ſectionem parallelam lateri BC biſſecare: rectae Bb, Aa

erunt ergo duae diametri gravitatis trianguli ABC (183. §.), cujus centrum gravitatis debebit idcirco eſſe punctum interſectionis g rectarum Bb, Aa (160. §.).

Ducatur jam ex b parallela $b\beta$ ad Aa; erunt triangula CAa, $Cb\beta$ inter ſe ſimilia; hinc, ob $Cb = \frac{1}{2} CA$, etiam $b\beta = \frac{1}{2} Aa$, et $C\beta = \frac{1}{2} Ca = \frac{1}{4} BC$, $B\beta = \frac{3}{4} BC$: quamobrem in triangulis ſimilibus Bga, $Bb\beta$ habebimus $B\beta : Ba = b\beta : ga$, ſeu $\frac{3}{4} BC : \frac{1}{2} BC = \frac{1}{2} Aa : ga = \frac{1}{3} Aa$.

185. Corollarium 1.

Centrum gravitatis cujuslibet trianguli rectilinei ABC jacet in puncto g rectae Aa ex vertice A cujuscunque anguli ad punctum medium a lateris oppoſiti BC ductae, ita ut ejus diſtantia ga a puncto a aequetur uni tertiae, diſtantia vero Ag a puncto A aequalis ſit duabus tertiis totius rectae Aa, nimirum $ga = \frac{1}{3} Aa$, et $gA = \frac{2}{3} Aa$ (184. §.).

186. Corollarium 2.

Hinc pendet inventio centri gravitatis cujuslibet quadrilateri ABCD (35. Fig.). Si enim ducta diagonali AC, ductisque ad ejus medium punctum c rectis Bc, Dc, hae ipſae rectae dividantur in tres partes aequales, quo fiat $Ba = \frac{2}{3} Bc$ et $Db = \frac{2}{3} Dc$; erunt puncta a, b centra gravitatis triangulorum ABC, ADC (185. §.): determinatis ergo eorundem areis, et ducta recta ab, invenietur centrum gravitatis d quadrilateri ABCD, ſi recta ab ita ſecetur in d, ut ſit (167. 154. §.). Fig. 35.

$$ad = \frac{ab \,.\, ADC}{ABC + ADC}; \quad bd = \frac{ab \,.\, ABC}{ABC + ADC}.$$

Secus poterunt in hac determinatione puncti d areis ABC, ADC ſubſtitui perpendicula Bq, Dp ad diagonalem AC demiſſa: cum enim ſit $ABC : ADC = Bq : Dp$, hinc $ABC = \frac{ADC \,.\, Bq}{Dp}$; erit etiam

$$ad = \frac{ab \,.\, ADC}{\frac{ADC \,.\, Bq}{Dp} + ADC}; \quad bd = \frac{ab \,.\, \frac{ADC \,.\, Bq}{Dp}}{\frac{ADC \,.\, Bq}{Dp} + ADC};$$

$$\text{ſeu } ad = \frac{ab \,.\, Dp}{Bq + Dp}; \quad bd = \frac{ab \,.\, Bq}{Bq + Dp}.$$

187. Co-

187. Corollarium 3.

Geometrice determinabis centrum gravitatis quadrilateri ABCD, ſi, determinatis centris gravitatis a, b triangulorum ABC, ADC per (185. §.) ductaque recta ab, et ductis ad diagonalem AC perpendiculis Bq, Dp, ducas rectam indefinitam $b\beta$ ſub quocunque angulo $ab\beta$, tum in hac capias bn = Bq, mn = Dp: ſi enim ex m ducas ad a rectam ma, et huic ex n parallelam nd; debebit nd rectam ab ſecare in centro gravitatis quadrilateri ABCD, ob bm : bn = ab : bd, adeoque

$$bd = \frac{ab.bn}{bm} = \frac{ab.Bq}{Bq+Dp} \text{ (186. §.).}$$

188. Corollarium 4.

In multis caſibus habebit datum quadrilaterum ABCD duo latera parallela CB, AD, quae perpendiculis Bq, Dp in (186. 187. §.) poterunt ſubſtitui. Cum enim in hac hypotheſi ſit Bq : Dp = BC : AD, hinc Bq + Dp : Bq = BC + AD : BC; poterit in (186. 187. §.) ſummi BC loco Bq, AD loco Dp, et BC + AD loco Bq + Dp.

189. Corollarium 5.

Quodſi vero quaevis bina latera oppoſita BC et AD, DC et AB, fuerint inter ſe parallela; jacebunt rectae Bc, Dc, ab in una recta BcD, et centrum gravitatis d coincidet cum puncto medio rectae BcD in (186. §.): centrum gravitatis cujuslibet parallelogrammi ABCD (36. Fig.) eſt itaque punctum c, in quo ejus diagonales AC, BD ſeſe interſecant.

190. Corollarium 6.

Fig. 37. Si quaeras centrum gravitatis dati cujuscunque polygoni irregularis, ut ABCDEFA (37. Fig.), reſolve illud in triangula per diagonales AE, AD, BD, tum, determinatis ſingulorum triangulorum centris gravitatis a, b, c, d per (185. §.), et areis, quaere per (167. 157. §.) commune centrum gravitatis omnium triangulorum.

191. Theorema.

Centrum gravitatis cujuslibet polygoni regularis coincidit cum illius centro magnitudinis.

Demon-

Demonſtratio.

Si cogitetur unum planum perpendiculare ad planum dati polygoni regularis tranſire per illius centrum magnitudinis, et unum angulum perimetri ejusdem polygoni biſſecare; dividetur polygonum in duas partes inter ſe ſimiles et aequales, proinde perfecte congruentes, eundemque reſpectu plani ſecantis ſitum habentes; centra idcirco gravitatis harum partium in iisdem jacebunt diſtantiis a plano ſecante: producta ergo ex areis aequalibus earundem partium dati polygoni in diſtantias centrorum gravitatis a plano ſecante, ſeu momenta partium polygoni reſpectu plani ſecantis erunt inter ſe aequalia (150. §.), proinde erit planum ſecans unum planum gravitatis dati polygoni regularis (163. §.). Quodſi vero omnia plana ad planum dati polygoni regularis perpendicularia, et quoscunque angulos illius perimetri biſſecantia ſint plana gravitatis ipſius polygoni, quia etiam planum in quo totum polygonum jacet, eſt illius planum gravitatis (166. §.); neceſſe eſt, ut omnes rectae quoscunque angulos perimetri biſſecantes ſint diametri gravitatis ejusdem polygoni (161. §), quae omnes, ſicut in illius centro magnitudinis, ita quoque in ejusdem centro gravitatis ſeſe debent interſecare (160. §.).

192. Problema.

Data aequatione ad curvam XQZ (31. Fig.) *inter abſciſſas* $z = Qa$ *in ejus axe* QC *computatas, et ordinatas orthogonas* $y = pa$, *invenire centrum gravitatis ſpatii* $pQqap = M$ *inter arcum* pQq et chordam pq *ad axem* QC *perpendicularem comprehenſi.* Fig. 31.

Solutio.

1. Centrum gravitatis ſpatii pQqap erit certum punctum γ axeos QC (183. §.), cujus inventio pendet ab inventione diſtantiae $Q\gamma$ a curvae vertice Q.

2. Cum jam M denotet maſſam ſegmenti pQqap, ſi praeterea vocetur μ ejus momentum reſpectu plani MN in Q ad QC perpendicularis; debebit eſſe (168. §.) $Q\gamma = \frac{\mu}{M}$.

3. Porro pro $S = Qpa$ eſt $M = 2S$, et $\partial S = y\partial z$ (Vol. I. §. 488.), $\partial M = 2\partial S$: ob (171. §.) debebit ergo poni

$$\partial M = 2y\partial z; \quad \partial\mu = 2yz\partial z.$$

4. Ab integratione horum exponentium differentialium pendet itaque inventio tam maſſae $M = pQqap$, quam ejus momenti μ reſpectu plani MN; clarum vero eſt, pro abſciſſa $z = Qa = o$, vel ordinata $y = pa = o$, debere fieri tam $M = o$, quam $\mu = o$, unde ſequitur, integralia eorundem exponentium ſic eſſe determinanda, ut quodvis illorum aequetur nihilo, ſeu fiat $z = o$, ſeu $y = o$.

5. Inventis autem integralibus M, μ, invenietur eo ipſo etiam diſtantia $Q\gamma$ centri gravitatis γ (1) per (2), cujus generalis expreſſio erit ob (3)

$$Q\gamma = \frac{\int 2yz\varepsilon z}{\int 2y\varepsilon z} = \frac{\int yz\varepsilon z}{\int y\varepsilon z}.$$

193. Problema.

Fig. 38. *Invenire centrum gravitatis ſegmenti* pQqap (38. Fig.) *circuli radio* CQ=r *deſcripti.*

Solutio.

Centrum gravitatis ſegmenti $M = pQqap$ coincidet cum puncto γ radii $CQ = r$ perpendicularis ad chordam pq, et ejus diſtantia a puncto Q erit $Q\gamma = \frac{\mu}{M}$ (192. §. 2. n.). Verum pro $y = pa$, et $z = Qa$ eſt $y^2 = 2rz - z^2$ aequatio ad circulum, ex qua obtinebimus

$$y = \sqrt{(2rz - z^2)};\quad \varepsilon y = \frac{(r - z)\varepsilon z}{y};$$
$$\text{et } z\varepsilon z = r\varepsilon z - y\varepsilon y.$$

In (192. §. 3. n.) debebit ergo hoc caſu poni

$$\varepsilon M = 2y\varepsilon z;\quad \varepsilon\mu = 2ry\varepsilon z - 2y^2\varepsilon y:$$

adeoque integrando per (192. §. 4. n.) inveniemus

$$\mu = r\int 2y\varepsilon z - \tfrac{2}{3}y^3 = rM - \tfrac{2}{3}y^3.$$

Quare cum area ſegmenti pQqap ſit

$$M = \tfrac{1}{2}r \cdot pQq - y\sqrt{(r^2 - y^2)};$$

erit diſtantia centri gravitatis γ a puncto Q

$$Q\gamma = \frac{\mu}{M} = r - \tfrac{2}{3} \cdot \frac{y^3}{pQq \cdot r - 2y\sqrt{(r^2 - y^2)}},$$

ubi pQq eſt arcus ſegmenti pQqap.

194. Corollarium 1.

Diſtantia $C\gamma$ centri gravitatis γ ſegmenti circularis pQqap a centro C circuli, ob $C\gamma = r - Q\gamma$, erit per (193. §.)

$$C\gamma = \frac{4}{3} \cdot \frac{y^3}{pQq.r - 2y\sqrt{(r^2 - y^2)}}.$$

195. Corollarium 2.

Pro chorda $2y = 2r$ in (194. §.) obtinebitur diſtantia centri gravitatis γ ſemicirculi XQZCX (39. Fig.) radio $CX = r$ deſcripti ab ejus centro C per ſemiperipheriam XQZ, nimirum Fig. 39.

$$C\gamma = \frac{4}{3} \cdot \frac{r^2}{XQZ} = \frac{4}{3} \cdot \frac{r}{\pi}.$$

Scholion.

Si ſuper radio $XC = QC = r$ quadratrix dinoſtratis cogitetur deſcribi, origine in X ſumta; debebit illa terminari in centro gravitatis γ ſemiperipheriae XQZ circuli radio r deſcripti, per (179. §.) et (Vol. I. 602. §.). Proprietatem hanc quadratricis *Guldinus* in ſua *Centro-Baryca.* Cap. VI. primus notavit: verum hanc ipſam proprietatem habet etiam cyclois vulgaris, quae ſuper diametro XZ poteſt deſcribi. Semibaſis enim XC hujus cycloidis debet aequari ſemiperipheriae circuli genitoris (Vol. I. 607. §.): diameter circuli genitoris ejusdem cycloidis debet ergo eſſe $= \frac{2.XC}{\pi}$, adeoque aequalis diſtantiae $C\gamma$ centri gravitatis γ ſemiperipheriae circularis XQZ ab ejusdem centro C (179. §.). Altera vero proprietas cycloidis ſuper diametro XZ deſcriptae, et, ut vidimus, tranſeuntis per centrum gravitatis γ ſemiperipheriae circularis XQZ, in eo conſiſtit, quod centrum gravitatis ejusdem cycloidis cum centro gravitatis areae ſemicircularis XQZCX coincidat: cum enim, ut oſtendimus, ſit $\frac{2.XC}{\pi}$ diameter illius circuli genitoris; erit $\frac{4}{3} \cdot \frac{XC}{\pi}$ diſtantia centri gravitatis ejusdem cycloidis a puncto C (182. §.), aequalis diſtantiae centri gravitatis areae ſemicirculi XQZ ab eodem puncto C (195. §.).

196. Corollarium 3.

Et pro $z = 2r$, hinc $y = 0$ erit $Q\gamma = r$ et $C\gamma = 0$ (193. 194. §.), id eſt: centrum gravitatis integri circuli coincidit cum illius centro magnitudinis.

197. Corollarium 4.

Fig. 40. Datis chordis $rs=2c$, $pq=2C$ (40. Fig.) in circulo radii $CX=r$ jacebit centrum gravitatis α ſpatii $rsqp$ inter chordas parallelas rs, pq comprehenſi in radio CQ eaſdem biſſecante in b, a; diſtantia vero illius a centro C determinabitur hoc modo. Si γ, δ ſint centra gravitatis ſegmentorum $pQqap$, $rQsbr$; debebit eſſe per (155. §.)

$$C\alpha=\frac{C\gamma.pQqap-C\delta.rQsbr}{pqsr}.$$

Quare, ſi per datas chordas $2c$, $2C$, datumque radium r exprimantur tam areae ſegmentorum $pQqap$, $rQsbr$, $pqsr=pQqap-rQsbr$, quam diſtantiae $C\gamma$, $C\delta$ juxta (194. §.), prodibit, peracta ſubſtitutione et reductione, ſequens expreſſio

$$C\alpha=\tfrac{2}{3}.\frac{C^3-c^3}{r.qs+c\surd(r^2-c^2)-C\surd(r^2-C^2)}.$$

Si autem diſtantiam centri gravitatis α areae $pqsr$ a puncto a deſideres; invenies illam ſubtractione diſtantiae $Ca=\surd(r^2-C^2)$ ab inventa diſtantia $C\alpha$.

198. Corollarium 5.

Fig. 41. Pro $2C=2r$ in (197. §.) invenietur diſtantia $C\alpha$ centri gravitatis α ſpatii $rsZX$ (41. Fig.) inter diametrum XZ circuli et chordam $rs=2c$ ei parallelam comprehenſi a centro C magnitudinis ejuſdem circuli, nimirum

$$C\alpha=\tfrac{2}{3}.\frac{r^3-c^3}{r.sZ+c\surd(r^2-c^2)}.$$

199. Corollarium 6.

Fig. 42. Datis centris gravitatis γ, β (42. Fig.) ſegmenti $pQqap$ et trianguli Cpq, invenietur in radio CQ biſſecante chordam $pq=2y$ centrum gravitatis α ſectoris $CpQqC$ circuli radio $CQ=r$ deſcripti, determinata per (167. 154. §.) ejus diſtantia a centro C, nimirum

$$C\alpha=\frac{C\gamma.pQqap+C\beta.Cpq}{pQqap+Cpq}.$$

Cum enim ſit $Ca=\surd(r^2-y^2)$, et $C\beta=\tfrac{2}{3}Ca$ (185. §.), determinata area trianguli $Cpq=y\surd(r^2-y^2)$, determinataque area ſegmenti

pQqap,

pQqap, et diſtantia $C\gamma$ illius centri gravitatis γ a centro C per (194. §.); debebit eſſe

$$C\alpha = \frac{4}{3}.\frac{ry}{pQq}.$$

denotante pQq arcum ſectoris.

200. Corollarium 7.

Si γ eſſet centrum gravitatis arcus pQq, fieret $C\gamma = \frac{2ry}{pQq}$ (178. §.); hinc $C\alpha = \frac{2}{3}C\gamma$ (199. §.), id eſt: diſtantia centri gravitatis α cujuslibet ſectoris CpQqC ab ejus centro magnitudinis C aequatur duabus tertiis diſtantiae centri gravitatis γ arcus pQq ab eodem centro C.

201. Corollarium 8.

Si deſideretur centrum gravitatis v ſpatii abed (43. Fig.) inter arcus concentricos ab, de radiis $Cd = Ce = r$, $Ca = Cb = R$ deſcriptos comprehenſi; jacebit illud in puncto v radii Cm biſſecantis arcus ab, de, ita, ut ſi x, u dicantur eſſe centra gravitatis ſectorum Cab, Cde, illius diſtantia a centro C debeat eſſe per (167. 155. §.) Fig. 43.

$$Cv = \frac{Cx.aCb - Cu.Cde}{aCb - Cde}.$$

Hinc, ſi 2c, 2C ſint chordae ſubtendentes arcus de, ab, obtinebimus per (199. §.)

$$Cx = \frac{4RC}{3.ab};\ Cu = \frac{4rc}{3.de};$$

$$aCb = \frac{1}{2}R.ab;\ dCe = \frac{1}{2}r.de;$$

$$Cv = \frac{4}{3}.\frac{CR^2 - cr^2}{ab.R - de.r} = \frac{4C}{3.ab}.\frac{R^3 - r^3}{R^2 - r^2}.$$

202. Corollarium 9.

Centrum gravitatis v dimidii annuli AmBEuDA (44. Fig.) radiorum $CD = r$, $CA = R$ jacebit in radio Cm ipſum biſſecante in diſtantia a centro C (201. §.). Fig. 44.

$$Cv = \frac{4R}{3.AmB}.\frac{R^3 - r^3}{R^2 - r^2} = \frac{4}{3.\pi}.\frac{R^3 - r^3}{R^2 - r^2}.$$

203. Problema.

Fig. 31. *Invenire centrum gravitatis γ ſpatii* pQq (31. Fig.) *inter arcum* pQq *parabolae, et chordam* pq *illius axi* QC *perpendicularem comprehenſi.*

Solutio.

Sit $M = pQqap$ area dati ſpatii pro $z = Qa$, $y = pa$: cum debeat eſſe $y = p^{\frac{1}{2}} z^{\frac{1}{2}}$ (Vol. I. §. 508.); erit in (192. §. 3. n.)

$$\partial M = 2 p^{\frac{1}{2}} z^{\frac{1}{2}} \partial z; \quad \partial \mu = 2 p^{\frac{1}{2}} z^{\frac{3}{2}} \partial z.$$

Peracta igitur integratione per (192. §. 4. n.), invenietur diſtantia centri gravitatis γ ſegmenti pQqap ab ejus vertice Q per (192. §. 2. n.)

$$Q\gamma = \frac{\mu}{M} = \frac{3}{5} z = \frac{3}{5} Qa.$$

204. Problema.

Invenire centrum gravitatis γ ſpatii pQqap *inter arcum* pQq *ellipſeos et chordam* pq *ejus axi transverſo* QC *perpendicularem comprehenſi.*

Solutio.

Pro $Qa = z$, $pa = y$ eſt in ellipſi (Vol. I. 540. §.) $y = \sqrt{\left(pz - \frac{pz^2}{a}\right)}$: igitur debet poni in (192. §. 3. n.)

$$\partial M = \frac{2 p^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{2}}} \cdot z^{\frac{1}{2}} \partial z \sqrt{(a - z)};$$

$$\partial \mu = \frac{2 p^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{2}}} \cdot z^{\frac{3}{2}} \partial z \sqrt{(a - z)}.$$

Captis integralibus per (Vol. I. §. 289. 301.), et determinatis conſtantibus juxta (192. §. 4. n.) per (Vol. I. §. 238.), reperiemus

$$M = \frac{2 p^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{2}}} \left(\frac{1}{4}(2z - a)\sqrt{(az - z^2)} \right.$$
$$\left. + \frac{a^2}{8} \text{Arc Sin} \frac{2z - a}{a} + \frac{\pi a^2}{16} \right);$$

μ =

$$\mu = \frac{2p^{\frac{3}{2}}}{a^{\frac{1}{2}}}\left(-\tfrac{1}{3}\sqrt{(az-z^2)^3} + \frac{a(2z-a)}{8}\sqrt{(az-z^2)}\right.$$
$$\left. + \frac{a^3}{16}\,\text{Arc Sin}\,\frac{2z-a}{a} + \frac{\pi a^3}{32}\right).$$

Quamobrem, ſi μ dividamus per M, obtinebimus hinc diſtantiam $Q\gamma$ centri gravitatis γ ſpatii elliptici pQqap pro quavis abſciſſa $z = Qa$ ob (192. §. 2. n.).

205. Corollarium 1.

Si abſciſſa $z = Qa = \frac{1}{2}a$ aequetur ſemiaxi transverſo ellipſeos; erit pQqap dimidia area ellipſeos, et diſtantia illius centri gravitatis γ a vertice Q erit $Q\gamma = \frac{\mu}{M}$ poſita abſciſſa $z = \frac{1}{2}a$ in (204. §.); unde determinari poteſt etiam ejus diſtantia a centro a ellipſeos, ob $a\gamma = Qa - Q\gamma = \frac{1}{2}a - Q\gamma$; nimirum erit

$$Q\gamma = \frac{a(3\pi-4)}{6\pi};\quad a\gamma = \frac{2a}{3\pi}.$$

Centrum ergo gravitatis γ ſemiellipſeos pQqap coincidit cum centro gravitatis ſemicirculi rQsar, qui ſuper axe conjugato pq utrinque producto e centro ellipſeos a radio aQ aequali ſemiaxi transverſo poteſt deſcribi (195. §.).

206. Corollarium 2.

Hoc modo licebit etiam quaerere diſtantiam $Q\gamma$ centri gravitatis γ ſpatii pQqap inter arcum pQq hyperbolae, et chordam pq illius axi transverſo QC perpendicularem comprehenſi. Cum enim, pro $z = Qa$, $y = pa$, in hyperbola ſit $y = \sqrt{\left(pz + \frac{pz^2}{a}\right)}$ ob (Vol. I. §. 564.); debebit eſſe in (192. §. 3. n.)

$$dM = \frac{2p^{\frac{3}{2}}}{a^{\frac{1}{2}}}\,z^{\frac{1}{2}}dz\sqrt{(a+z)};$$

$$d\mu = \frac{2p^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{3}{2}}}\,z^{\frac{3}{2}}dz\sqrt{(a+z)}:$$

quodſi ergo determines integralia algebraico-logarithmica M, μ juxta

(192.

(192. §. 4. n.) per (Vol. I. 301. 238. §.), tum dividas μ per M; dabit quotiens diſtantiam Qγ per (192. §. 2. n.).

207. Problema.

Fig. 45. *Invenire centrum gravitatis γ ſpatii* pQqap (45. Fig.) *inter arcus* pQ, qQ *ciſſoidis et chordam* pq *illius axi* QC *perpendicularem comprehenſi.*

Solutio.

Pro abſciſſa $z = Qa$, ordinata $y = pa$, et axe ciſſoidis $QC = a$ eſt $y = \frac{z^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{(a-z)}}$ per (Vol. I. §. 584): in (192. §. 3. n.) debet ergo poni

$$\partial M = \frac{2 z^{\frac{3}{2}} \partial z}{\sqrt{(a-z)}}; \quad \partial \mu = \frac{2 z^{\frac{5}{2}} \partial z}{\sqrt{(a-z)}}.$$

Si jam hi exponentes differentiales juxta (192. §. 4. n.) per (Vol. I. §. 302. 287.) integrentur, fiet

$$M = \frac{3a^2\pi}{8} + \frac{3a^2}{4} \text{Arc Sin} \frac{2z-a}{a}$$
$$- \tfrac{1}{2}(2z+3a)\sqrt{(az-z^2)};$$
$$\mu = \frac{5a^3\pi}{16} + \frac{5a^3}{8} \text{Arc Sin} \frac{2z-a}{a}$$
$$- \tfrac{1}{12}(8z^2+10az+15a^2)\sqrt{(az-z^2)}.$$

Conſequenter, diviſo momento μ per maſſam M, invenietur diſtantia Qγ juxta (192. §. 2. n.) centri gravitatis γ ſpatii pQqap a cuſpide Q ciſſoidis pro quavis abſciſſa $z = Qa$.

208. Corollarium.

Conſtat, rectam PR ad axem $QC = a$ ciſſoidis perpendicularem eſſe aſymptotum, cui rami QS, QT nuſpiam poſſint occurrere, licet ii, quo magis producuntur, eo propius ad PR debeant accedere (Vol. I. §. 583.): quodſi igitur ſupponas, ramos QS, QT aſymptoto PR in punctis P, R, quorum diſtantiae a puncto C ſint indefinite magnae, occurrere; obtinebitur pro $z = QC = a$ diſtantia $Q\gamma = \frac{5}{6}a = \frac{5}{6}QC$ centri gravitatis γ totius ſpatii inter ramos QS, QT et aſymptotum PR comprehenſi a cuſpide Q ciſſoidis.

209. Pro-

209. Problema.

Dato radio r *circuli genitoris* QbCdQ (32. Fig.) *cycloidis* XQZ, *invenire centrum gravitatis* γ *ſpatii* pQqap *inter arcum* pQq *et chordam* pq *axi* QC *perpendicularem comprehenſi.* Fig. 32.

Solutio.

1. Sumta pro $z = Qa$, $y = pa$ aequatione ad cycloidem (Vol. I. §. 606.), debebit eſſe in (192. §. 3. n.)

$$M = 2\int \partial z \sqrt{(2rz - z^2)} + 2r\int \partial z \text{ Arc Sin v } \frac{z}{r};$$

$$\mu = 2\int z \partial z \sqrt{(2rz - z^2)} + 2r\int z \partial z \text{ Arc Sin v } \frac{z}{r}.$$

2. Quodſi autem alteram partem utriusque integralis reſolvas per (Vol. I. §. 257.); invenies in (1)

$$M = 2rz \text{ Arc Sin v } \frac{z}{r} + 2\int z^{\frac{1}{2}} \partial z \sqrt{(2r - z)}$$
$$- 2r\int \frac{z^{\frac{1}{2}} \partial z}{\sqrt{(2r - z)}};$$

$$\mu = rz^2 \text{ Arc Sin v } \frac{z}{r} + 2\int z^{\frac{3}{2}} \partial z \sqrt{(2r - z)}$$
$$- r\int \frac{z^{\frac{3}{2}} \partial z}{\sqrt{(2r - z)}}.$$

3. Si demum binas poſteriores partes utriusque integralis in (2) juxta (192. §. 4. n.) per (Vol. I. 289. 302. 301. §.) determines, obtinebis

$$M = (z + r)\sqrt{(2rz - z^2)} + r(2z - r) \text{ Arc Sin v } \frac{z}{r}.$$

$$\mu = \frac{17rz - 4z^2 + 3r^2}{6}\sqrt{(2rz - z^2)} + \tfrac{1}{2}r(2z^2 - r^2) \text{ Arc Sin v } \frac{z}{r}.$$

Hinc, ſi μ dividatur per M, derivabitur diſtantia $Q\gamma$ centri gravitatis γ ſpatii pQqap pro quavis abſciſſa $z = Qa$ (192. §. 2. n.).

210. Corollarium.

Pro integra cycloide XQZ debet in (209. §.) poni $z = QC = 2r$, hinc $M = 3r^2.\pi$, $\mu = \tfrac{7}{2}r^3.\pi$; diſtantia centri gravitatis γ ſpatii XQZCX a vertice Q erit ergo

$$Q\gamma = \frac{\mu}{M} = \tfrac{7}{6}r = \tfrac{7}{12}QC.$$

 211. Theo-

211. Theorema.

Fig. 46. *Si ex centris gravitatis* G, g (46. Fig.) *duorum triangulorum ſimilium* ABC, abc *ad puncta extima* B, C, b, c, *laterum homologorum* BC, bc *ducantur rectae* GB, GC, gb, gc; *erunt triangula* GBC, gbc *inter ſe ſimilia.*

Demonſtratio.

Si rectae BG, CG, bg, cg producantur, debebunt illae biſſecare latera AC, AB, ac, ab in E, D, e, d, (185. §.): erit ergo AC : ac = EC : ec, et AB : ab = AD : ad. Quare, cum in triangulis ſimilibus Abc, abc, ſit angulus A = a, C = c, et AC : ac = AB : ab, BC : bc = AC : ac; debebit etiam eſſe AC : ac = AD : ad, et BC : bc = Ec : ec: ſunt ergo etiam triangula ADC et adc, BEC et bec inter ſe ſimilia; proinde eſt angulus ACD = acd, et EBC = ebc, et eo ipſo etiam angulus GCB = gcb, et triangulum BGC eſt ſimile triangulo gbc.

212. Theorema.

Si rectae ex centris gravitatis quorumvis duorum polygonorum ſimilium conſtantium n *lateribus ad puncta extima duorum laterum homologorum ductae comprehendant triangula inter ſe ſimilia; neceſſe eſt, ut hac ipſa proprietate etiam polygona ſimilia conſtantia uno pluribus lateribus gaudeant.*

Demonſtratio.

Fig. 47. 1. Imaginemur nobis in (47. Fig.) duo polygona ſimilia ABCDEFGA, abcdefga, quorum quodvis habeat latera numero n + 1, et centra gravitatis eorundem polygonorum ſint Q, q, duo vero quaecunque latera homologa DE, de: demonſtrandum eſt, quod, ſi ducantur rectae QD, QE, qd, qe, triangula QDE, qde in aſſumta hypotheſi debeant eſſe inter ſe ſimilia.

2. Ductis rectis DF, df naſcentur duo polygona ſimilia ABCDFGA, abcdfga conſtantia ob (1) lateribus numero n, et triangula ſimilia DFE, dfe.

3. Quamobrem, ſi P, p ſint centra gravitatis polygonorum (2), et ducantur rectae PD, PF, pd, pf; erunt per hypotheſim triangula PDF, pdf inter ſe ſimilia.

4. Por-

4. Porro ſint R, r centra gravitatis triangulorum DFE, dfe; erunt triangula DRE, dre per (211. §.) inter ſe ſimilia.

5. Ductis autem inter centra gravitatis P, R, p, r (1) (4) rectis PR, pr, jacebunt centra gravitatis Q, q (1) in iisdem rectis, ita ut ſit per (154. §.)

$$QR = \frac{PR.ABCDFGA}{DFE}; \quad qr = \frac{pr.abcdfga}{dfe}$$

igitur debet eſſe

$$QR:qr = PR.ABCDFG.dfe : pr.abcdfg.DFE.$$

6. Cum autem generatim areae polygonorum ſimilium ſint inter ſe ut quadrata quarumvis dimenſionum homologarum; neceſſe eſt, ut ob (1) (2) (3) (4) ſit $ABCDFG : abcdfg = DFE : dfe = DE^2 : de^2 = DR^2 : dr^2$, unde et ex (5) obtinebimus

$$QR:qr = PR:pr$$

7. Deinde ob ſimilitudinem triangulorum in (2) (3) (4) erit angulus $PDR = pdr$, et $PD:pd = DF:df = DE:de = DR:dr$, unde neceſſario ſequitur, etiam triangula PDR, pdr eſſe inter ſe ſimilia, et ideo eſſe $DR:dr = PR:pr = QR:qr$ per (6): igitur ſunt etiam triangula DQR, dqr, inter ſe ſimilia, anguli QDR et qdr, DQR et dqr, DRQ et drq ſunt inter ſe aequales, et $QR:qr = DR:dr = RE:re$ ob (4). Quamobrem, cum ſit etiam angulus $DRE = dre$ (4), hinc $QRE = qre$, debent quoque triangula QRE, qre eſſe ſimilia.

8. Hinc demum, ob ſimilitudinem triangulorum DRE, dre, et DQR, dqr, item QRE, qre in (4) (7), neceſſario ſequitur ſimilitudo triangulorum DQE, dqe, quae erat demonſtranda (1).

213. Corollarium 1.

Si rectae QD, QE, qd, qe ex punctis Q, q, intra perimetros datorum polygonorum ſimilium aſſumtis, ductae ad puncta extima D, E, d, e duorum laterum homologorum DE, de comprehendant triangula QDE, qde; debebunt haec triangula eſſe inter ſe ſimilia, ſi puncta Q, q ſint centra gravitatis polygonorum. Cum enim hoc de figuris trium laterum in (211. §.) ſit demonſtratum, et, utprimum id in figuris quotcunque

laterum locum habet, eo ipſo etiam in figuris uno plurium laterum ſubſiſtere debeat (212. §.); debet id neceſſario de quibuslibet cogitabilibus polygonis ſimilibus verum eſſe (Vol. I. §. 31.).

214. Corollarium 2.

Si ex punctis Q, s duorum polygonorum ſimilium ad puncta extima duorum laterum homologorum ducantur rectae QD, QE, sd, se, conſtetque, illas comprehendere triangula ſimilia DQE, dse, et Q eſſe centrum gravitatis polygoni ABDFA; erit eo ipſo etiam punctum s centrum gravitatis polygoni abdfa. Secus jaceret illud in certo puncto q, eſſentque triangula qde, qse ob (213. §.) eidem tertio triangulo QDE, hinc etiam inter ſe ſimilia, quod eſt impoſſibile.

215. Corollarium 3.

Dato itaque centro gravitatis Q certi polygoni ADF, invenies centrum gravitatis s polygoni adf priori ſimilis, ſi, ductis ad extima puncta D, E unius lateris DE rectis QD, QE, ſuper latere homologo de conſtruas triangulum sde ſimile triangulo QDE (214. §.).

DISSER-

DISSERTATIO VII.

DE INVESTIGATIONE CENTRI GRAVITATIS IN CORPORIBUS, EORUMQUE SUPERFICIEBUS.

216. Theorema.

Si ABDC (48. Fig.) *ſit corpus quodcunque, in quo ſingulae ſectiones* mn *baſibus* AB, CD *inter ſe parallelis et aequalibus pariter parallelae et aequales ſua centra gravitatis habeant in recta* PQ *intercepta inter centra gravitatis* P, Q *baſium* AB, CD; *erit punctum medium a rectae* PQ *centrum gravitatis corporis* ABDC. Fig. 48.

Demonſtratio.

Si per punctum medium a rectae PQ tranſeat planum MN perpendiculare ad PQ; erit momentum cujusvis ſectionis mn reſpectu plani MN aequale producto ex ipſa ſectione mn in diſtantiam ba, puncti b rectae PQ, per quod tranſit ſectio mn, a puncto medio a rectae PQ (150. §.): cum ergo omnes ejusmodi ſectiones ſint inter ſe aequales, et pro qualibet ſectione mn cadente ad unam partem plani MN detur una ſectio mn jacens ad partem oppoſitam plani MN in pari diſtantia ba; neceſſe eſt, ut ſumma momentorum omnium ſectionum ex una parte plani MN cogitabilium aequetur ſummae momentorum omnium ſectionum cogitabilium ex parte oppoſita plani MN. Planum MN dividit itaque totum corpus ABDC in duas partes, quarum momenta reſpectu ejusdem plani ſunt inter ſe aequalia (147. §.); et ideo eſt MN planum gravitatis corporis ABDC (163. §.): eapropter, quia PQ eſt diameter gravitatis ejusdem corporis (183. §.), debet punctum a eſſe illius centrum gravitatis (162. §.).

217. Corollarium 1.

Recta PQ intercepta inter centra gravitatis P, Q baſium ABCDE, abcde dati cujuscunque priſmatis Bd per (190. §) determinabilia tranſit per centra gravitatis omnium ſectionum priſmatis illius baſibus parallela- Fig. 49.

rum (214. §.): medium ejus punctum α eſt ergo centrum gravitatis priſmatis B d (216. §.).

218. Corollarium 2.

Baſes priſmatis regularis ſunt polygona regularia, inter quorum centra jacet axis ejusdem priſmatis: centrum gravitatis priſmatis regularis coincidit ergo cum puncto medio illius axeos (191. 217. §.).

219. Corollarium 3.

Fig. 50. Et ob (196. §.) per (216. §.) erit medium punctum α axeos PQ dati cujuscunque cylindri ABCD (50. Fig.) centrum gravitatis ejusdem cylindri.

220. Corollarium 4.

Fig. 51. 52. 53. 54. Sic quoque, ſi datum corpus ſit ſegmentum cylindricum ABCcab (51. Fig.) abſciſſum plano ABba axi cylindri parallelo, vel fruſtum cylindricum ABCDdabc (52. Fig.) inter plana Ad, Bc axi cylindri parallela interceptum, aut ſector cylindricus ABCDdabc (53. Fig.), vel dimidius annulus cylindricus (54. Fig.); coincidet ob (216. §.) centrum gravitatis ejusmodi corporis cum medio puncto α rectae PQ interceptae inter centra gravitatis P, Q illius baſium per (194. 195. 197. 198. 199. 202. §.) determinabilia.

221. Problema.

Fig. 55. 56. *Invenire centrum gravitatis datae pyramidis, datique coni* ABD (55. 56. Fig.).

Solutio.

1. In cono ABD jacet centrum gravitatis cujuslibet ſectionis, pq parallelae illius baſi BD in axe AC (196. §.): in pyramide autem (55. Fig.), ſi ex centro gravitatis C baſeos BD ducatur recta AC ad verticem A, tranſibit haec recta per unum punctum c cujuslibet ſectionis pq parallelae baſi BD, quod, quia rectae pc, ce, BC, CE ductae ad puncta extima laterum homologorum pe, BE comprehendunt triangula pce, BCE ſimilia, debet eſſe centrum gravitatis ſectionis pq (214. §.); adeoque etiam centrum gravitatis cujuslibet ſectionis pq parallelae baſi BD pyramidis jacet in recta AC inter ejus verticem A et centrum gravitatis C baſeos intercepta. In cono et pyramide (56. 55. Fig.) debet ergo ejus centrum gravitatis jacere in recta AC (216. §.).

2. Quam-

2. Quamobrem ſumta parte indeterminata $z = Ac$ in recta $AC = a$ cogitetur per punctum c tranſire ſectio pq parallela baſi BD, quae abſcindat ex ABD partem $Apq = m$; erit, ſi ponatur tota maſſa $ABD = M$

$$m : M = z^3 : a^3, \text{ hinc } m = \frac{M}{a^3} z^3.$$

3. Sit jam MN planum perpendiculare ad AC, et μ momentum maſſae $m = pAq$ reſpectu ejusdem plani; erit per (171. §.)

$$\partial\mu = z\partial m; \text{ et in (2) } \partial m = \frac{3M}{a^3} z^2 \partial z:$$

$$\text{igitur } \partial\mu = \frac{3M}{a^3} z^3 \partial z, \text{ hinc } \mu = \frac{3Mz^4}{4a^3}.$$

4. Pro $z = AC = a$ in (3) invenietur ergo $\mu = \frac{3}{4}Ma$ momentum totius pyramidis vel coni ABD reſpectu plani MN: cum igitur illius centrum gravitatis debeat coincidere cum uno puncto γ rectae AC ob (1); erit ejus diſtantia perpendicularis ab eodem plano ob (168. §.)

$$A\gamma = \frac{\mu}{M} = \tfrac{3}{4}Ma : M = \tfrac{3}{4}a = \tfrac{3}{4}AC.$$

222. Corollarium 1.

Data quacunque pyramide ABD (55. Fig.), cujus centrum gravitatis deſideretur, quaeratur centrum gravitatis C illius baſeos BD (190. §.), et recta AC inter illud verticemque A intercepta dividatur in quatuor partes aequales, quo fiat $A\gamma = \frac{3}{4}AC$; erit γ centrum gravitatis pyramidis (221. §.). Fig. 55.

223. Corollarium 2.

Cum baſis pyramidis regularis ſit polygonum regulare, inter cujus centrum et verticem pyramidis jacet axis pyramidis; patet, centrum gravitatis tam pyramidis regularis (55. Fig.) quam cujuslibet coni (56. Fig.) coincidere cum puncto γ illius axeos AC, cujus diſtantia $A\gamma$ a vertice A aequatur tribus quartis totius axeos AC (191. 221. §.).

224. Problema.

Invenire centrum gravitatis dati coni truncati (57. Fig.) *vel datae pyramidis truncatae* mdnbBMDN (58. Fig.). Fig. 57. 58.

Solutio.

Solutio.

1. Determinatis centris gravitatis C, c baſium BMDN per (191. 196. §.), ductaque recta Cc, jacebit in hac centrum gravitatis γ totius maſſae mdnbBMDN, quod idcirco perfecte determinabitur, ſi definiatur illius diſtantia $C\gamma$ vel $c\gamma$ ab alterutro centro C, c.

2. Quamobrem cogitetur compleri tam conus quam pyramis truncata, quo recta Cc producta occurrat vertici A, et ſit in hac recta punctum a centrum gravitatis maſſae Abndm, et e centrum gravitatis maſſae ABNDM; adeoque per (221. §.)

$$Aa = \tfrac{3}{4} Ac; \quad Ae = \tfrac{3}{4} AC.$$

3. Maſſa ABNDM compoſita eſt ex maſſis Abndm, mdnbBNDM: ob (1) (2) per (155. §.) debet ergo eſſe

$$A\gamma = \frac{Ae . ABNDM - Aa . Abndm}{ABNDM - Abndm};$$

ſeu ob (2)

$$A\gamma = \tfrac{3}{4} \cdot \frac{AC . ABNDM - Ac . Abndm}{ABNDM - Abndm}.$$

4. Sed maſſae ABNDM, Abndm ſunt inter ſe ut cubi dimenſionum homologarum, adeoque

$$AC^3 : Ac^3 = ABNDM : abndm = \frac{ABNDM . Ac^3}{AC^3};$$

quare fiet, facta ſubſtitutione et reductione in (3)

$$A\gamma = \tfrac{3}{4} \cdot \frac{AC^4 - Ac^4}{AC^3 - Ac^3}.$$

5. Ut autem formula complectatur dimenſiones immediate in dato cono, vel data pyramide truncata determinabiles, ducantur ex centris gravitatis c, C baſium mbnd, MBND ad puncta homologa d, D rectae $cd = r$, $CD = R$ (in cono truncato radios baſium exprimentes), et $d\delta = cC = a$ ſit paralle la rectae AC: erit enim $D\delta : DC = d\delta : AC$, et $D\delta : dc = d\delta : Ac$. Quare habebimus

$$R - r : R = a : AC = \frac{aR}{R - r};$$

$$R - r : r = a : Ac = \frac{ar}{R - r}.$$

In

In (4) debebit itaque eſſe

$$A\gamma = \tfrac{3}{4}a.\frac{R^4 - r^4}{(R^3 - r^3)(R - r)}.$$

6. Hoc modo determinatur diſtantia centri gravitatis γ coni et pyramidis truncatae a vertice A coni et pyramidis integrae: cum autem non detur punctum A, et puncta C, c ſemper debeant determinari (1); derivetur ex (5) diſtantia ejusdem centri γ ab alterutro puncto C, c. Hinc, quia eſt $C\gamma = AC - A\gamma$, et $c\gamma = A\gamma - Ac$, ſumtis pro AC, Ac, Aγ valoribus ex (5), fiet

$$C\gamma = \tfrac{1}{4}a.\frac{R^4 + 3r^4 - 4Rr^3}{(R^3 - r^3)(R - r)};$$

$$c\gamma = \tfrac{1}{4}a.\frac{3R^4 + r^4 - 4rR^3}{(R^3 - r^3)(R - r)}.$$

225. Theorema.

Si revolutione plani QXC (59. Fig.), *ad* C *rectanguli inter duas rectas* QC, XC *et quamcunque lineam curvam* QX *intercepti, circa rectam* QC *generetur corpus rotundum* XQZ; *debebunt centra gravitatis cujuslibet ſegmenti* pQq *plano* prqs *ad* QC *perpendiculari abſciſſi, et cujuslibet fruſti* ABqp *intercepti inter ſectiones* ADBE, prqs *ad* QC *perpendiculares jacere in axe* QC. Fig. 59.

Demonſtratio.

Omnes ſectiones, ut e. gr. ADBE, ad QC perpendiculares, proinde baſi XRZS corporis XQZ parallelae ſunt totidem circuli, quorum centra jacent in axe rotationis QC, unde per (196. 216. §) neceſſario ſequitur, quod debebat demonſtrari.

226. Problema.

Data aequatione ad curvam QX *inter coordinatas orthogonas* $z = Qa$, $y = pa$, *inveſtigare centra gravitatis partium* pQq, ABqp *corporis* XQZ *revolutione plani* QXC *ad* C *rectanguli circa axem abſciſſarum* QC *geniti, pro ſectionibus* ADBE, prqs *baſi* XRZS *parallelis et ad* QC *perpendicularibus.*

Solutio.

1. Centrum gravitatis partis pQq ſit punctum γ, et centrum gravitatis partis ABqp ſit punctum α in axe rotationis QC (225. §.) at

 oſten-

oſtendendum eſt, qua ratione diſtantias centrorum gravitatis γ, α, a puncto Q liceat inveſtigare.

2. Sit MN planum ad QC perpendiculare, M maſſa pQq, et μ ejus momentum reſpectu plani MN, adeoque $\varepsilon M = \pi y^2 \varepsilon z$ (Vol. I. §. 490.): habebimus per (171. 168. §.)

$$\varepsilon M = \pi y^2 \varepsilon z; \quad \varepsilon \mu = \pi y^2 z \varepsilon z; \quad Q\gamma = \frac{\mu}{M}.$$

Quamobrem, ut data aequatione ad curvam QX inter coordinatas $z = Qa$, $y = pa$ inveniatur diſtantia $Q\gamma$ centri gravitatis γ maſſae pQq, integrari debent exponentes differentiales εM, $\varepsilon \mu$, ſic ut illorum integralia pro $z = 0$ pariter aequentur nihilo, cum evaneſcente $z = Qa$ tam maſſa $M = pQq$, quam ejus momentum μ reſpectu plani MN debeat aequari nihilo.

3. Porro, quia ſectio ADBE in determinata diſtantia Qb a vertice Q dari ſupponitur, ſectione altera prqs jacente in diſtantia variabili $Qa = z$; habebit tam ſegmentum AQB quam illius momentum reſpectu plani MN valorem determinatum, pars vero ABqp ſegmenti pQq ejusdemque momentum reſpectu plani MN erit valoris variabilis: exponentes differentiales maſſae ABqp ejusque momenti aequabuntur ergo exponentibus differentialibus maſſae $pQq = M$, ejusque momenti μ (Vol. I. §. 91.). Ob (2) poteſt ergo poni

$$\varepsilon M = \pi y^2 \varepsilon z; \quad \varepsilon \mu = \pi y^2 z \varepsilon z;$$

intelligendo per M maſſam ABqp, et per μ illius momentum reſpectu plani MN. Verum, quia maſſa ABqp decreſcente $Qa = z$ decreſcit, et pro $z = Qb$ fit aequalis nihilo, ut ope harum formularum tam maſſa $M = ABqp$, quam ejus momentum μ rite determinetur, ſic erunt integrandi exponentes differentiales εM, $\varepsilon \mu$, ut illorum integralia pro $z = Qb$ aequentur nihilo. Inventis vero completis valoribus pro M, μ, innoteſcet eo ipſo diſtantia centri gravitatis α maſſae ABqp a puncto Q, nimirum

$$Q\alpha = \frac{\mu}{M} \text{ per (168. §.).}$$

227. Corollarium 1.

Aequatio ad curvam QX inter coordinatas $z = Qa$, $y = pa$ ſit $y^2 = Az + Bz^2$, et $e = Qb$ data diſtantia ſectionis ADBE a puncto Q; habebimus pro centro gravitatis α maſſae ABqp in (226. §. 3. n.)

εM

$$\varepsilon M = \pi (Az + Bz^2)\varepsilon z;\quad \varepsilon\mu = \pi (Az^2 + Bz^3)\varepsilon z;$$

$$M = \pi (\tfrac{1}{2} Az^2 + \tfrac{1}{3} Bz^3) + C;\quad \mu = \pi (\tfrac{1}{3} Az^3 + \tfrac{1}{4} Bz^4) + C;$$

$$\pi (\tfrac{1}{2} Ae^2 + \tfrac{1}{3} Be^3) + C = 0;\quad C = -\pi (\tfrac{1}{2} Ae^2 + \tfrac{1}{3} Be^3);$$

$$\pi (\tfrac{1}{3} Ae^3 + \tfrac{1}{4} Be^4) + C = 0;\quad C = -\pi (\tfrac{1}{3} Ae^3 + \tfrac{1}{4} Be^4);$$

$$Q\alpha = \frac{\mu}{M} = \frac{4A(z^3 - e^3) + 3B(z^4 - e^4)}{6A(z^2 - e^2) + 4B(z^3 - e^3)}.$$

228. Corollarium 2.

Si fiat $e = Qb = 0$, abibit maſſa ABqp in ſegmentum pQq: quodſi ergo ſit γ centrum gravitatis ſegmenti pQq, obtinebitur illius diſtantia $Q\gamma$ a puncto Q pro $e = 0$ ex (227. §.), nimirum

$$Q\gamma = \frac{4A + 3Bz}{6A + 4Bz} \cdot z.$$

229. Corollarium 3.

Si QXC ſit quadrans circuli, cujus revolutione circa radium $QC = r$ generetur dimidius globus XQZ, continebit aequatio generalis in (227. §.) valores $A = 2r$, $B = -1$, pro quibus per (227. 228. §.) invenientur ſequentes expreſſiones diſtantiae $Q\alpha$ centri gravitatis α fruſti ſphaerici ABqp intercepti inter ſectiones ADBE, prqs perpendiculares ad radium QC, et diſtantiae $Q\gamma$ centri gravitatis γ ſegmenti ſphaerici pQq a puncto Q.

$$Q\alpha = \frac{8r(z^3 - e^3) - 3(z^4 - e^4)}{12r(z^2 - e^2) - 4(z^3 - e^3)};$$

$$Q\gamma = \frac{8r - 3z}{12r - 4z} \cdot z.$$

230. Corollarium 4.

Erat $z = Qa$: ſi igitur ponas $z = QC = r$ in (229. §.) obtinebis diſtantiam $Q\alpha$ centri gravitatis α fruſti ſphaerici inter baſim XZ dimidii globi XQZ et ſectionem AB ei parallelam intercepti a puncto Q, nimirum

$$Q\alpha = \frac{8r(r^3 - e^3) - 3(r^4 - e^4)}{12r(r^2 - e^2) - 4(r^3 - e^3)}.$$

231. Corollarium 5.

Quodſi autem in (230. §.) fiat $e = Qb = \pm o$, obtinebitur diſtantia $Q\alpha$ centri gravitatis α dimidii globi XQZ a puncto Q, atque ex hac reperietur ejus diſtantia $C\alpha = QC - Q\alpha = r - Q\alpha$ a centro C, nimirum

$$Q\alpha = \tfrac{5}{8}r; \quad C\alpha = \tfrac{3}{8}r.$$

Verum pro $z = 2r$ fiet in (229. §.) $Q\gamma = r$, id eſt: centrum gravitatis integri globi coincidit cum illius centro magnitudinis.

232. Corollarium 6.

Pari ratione applicari poſſunt praecedentes formulae (227. 228. §.) ad arcum QX parabolae, ellipſeos, et hyperbolae, qui ſua revolutione circa axem QC generet *paraboloidem*, *ſphaeroidem ellipticum*, vel *conoidem hyperbolicum* XQZ: aequatio enim generalis $y^2 = Az + Bz^2$ in (227. §.) complectetur $A = p$ et $B = o$ pro parabola; $A = p$ vero et $B = \frac{p}{a}$ vel $B = -\frac{p}{a}$ pro hyperbola vel ellipſi (Vol. I. §. 508. 540. 563.).

233. Corollarium 7.

In ſpecie itaque diſtantia centri gravitatis γ cujuslibet ſegmenti pQq paraboloidis XQZ ſubtenſi a ſectione $prqs$ perpendiculari ad axem QC a vertice Q erit per (232. 228. §.) $Q\gamma = \tfrac{2}{3}z = \tfrac{2}{3}Qa$.

234. Corollarium 8.

Diſtantia autem centri gravitatis γ ſegmenti pQq conoidis hyperbolici, revolutione arcus hyperbolae Qp circa axem transverſum QC geniti, ab ejus vertice Q erit pro $z = Qa$ per (228. 232. §.).

$$Q\gamma = \frac{4az + 3z^2}{6a + 4z}.$$

235. Corollarium 9.

Et diſtantia centri gravitatis γ ſegmenti pQq ſphaeroidis elliptici, revolutione arcus ellipſeos Qp circa axem transverſum geniti, ab ipſius vertice Q, erit per (228. 232. §.)

$$Q\gamma = \frac{4az - 3z^2}{6a - 4z}.$$

236. Co-

236. Corollarium 10.

Pro $z = QC = \frac{1}{2}a$ erit $Q\gamma = \frac{5}{16}a = \frac{5}{8}QC$ diſtantia centri gravitatis γ dimidii ſphaeroidis elliptici XQZ ab ejus vertice Q (235. §.): et pro $z = a$ fiet $Q\gamma = \frac{1}{2}a$, id eſt, centrum gravitatis integri ſphaeroidis elliptici coincidit cum ejus centro magnitudinis.

Scholion.

Paucas adhuc applicationes praecedentis problematis ſubjungam, prius quam ad inveſtigationem centri gravitatis ſuperficierum corporum rotundorum transeam: commendo autem tyronibus, ut ipſimet ſibi plura his ſimilia problemata proponant, eademque propria diligentia reſolvere ſtudeant, atque iſtud conſilium, quoties opportuna occaſio in aliis quoque diſquiſitionibus ſe obtulerit, ſequantur: plurimum ſane lucrabuntur, qui continua ejusmodi exercitatione uſum calculi differentio-integralis in primo horum opuſculorum volumine pertractati ſibi familiarem reddiderint.

237. Problema.

Invenire tam maſſam quam centrum gravitatis corporis pQq *geniti revolutione arcus parabolae* Qp (60. Fig.) *circa tangentem* QC *in ejus vertice* Q. Fig. 60.

Solutio.

1. Pro coordinatis orthogonis $z = Qa$, $y = pa$, maſſa $M = pQq$, ejusque momento μ reſpectu plani in Q ad QC perpendicularis, debebit eſſe per (226. §.)

$$dM = \pi y^2 dz; \quad d\mu = \pi y^2 z dz.$$

2. Centrum vero gravitatis γ corporis pQq jacebit in axe rotationis QC (225. §.) in diſtantia $Q\gamma = \frac{\mu}{M}$ a puncto Q (168. §.).

3. Sed, ſi QB ſit axis parabolae Qp, ad quem tangens QC eſt perpendicularis (Vol. I. §. 513.): erit $u^2 = pv$ pro ordinata orthogona $u = pb$, et abſciſſa $v = Qb$ (Vol. I. §. 508.): igitur erit $v^2 = \frac{u^4}{p^2}$. Quamobrem, ob $pb = Qa$, $Qb = ap$, habebimus etiam $y^2 = \frac{z^4}{p^2}$, et ob (1)(2).

$$dM = \frac{\pi}{p^2} z^4 dz; \quad d\mu = \frac{\pi}{p^2} z^5 dz;$$

$$M = \frac{\pi}{5p^2} z^5; \quad \mu = \frac{\pi}{6p^2} z^6; \quad Q\gamma = \frac{5}{6}z = \frac{5}{6}Qa.$$

 238. Pro-

238. Problema.

Fig. 45. *Invenire maſſam et centrum gravitatis corporis* pQq (45. Fig.) *revolutione plani* pQa *ad a rectanguli circa axem* QC *ciſſoidis* QS *geniti.*

Solutio.

Aequatio ad ciſſoidem QS inter coordinatas $y = pa$, $z = Qa$ eſt $y^2 = \frac{z^3}{2r - z}$ (Vol. I. §. 582.) pro $2r = QC$; centrum vero gravitatis γ corporis pQq revolutione plani pQa circa axem ciſſoidis QC geniti jacet in ipſo axe QC (225. §.): quodſi ergo M ſit maſſa, et μ momentum ejusdem corporis reſpectu plani in Q ad QC perpendicularis, habebimus per (226. §)

$$\varepsilon M = \frac{\pi z^3 \varepsilon z}{2r - z}; \quad \varepsilon \mu = \frac{\pi z^4 \varepsilon z}{2r - z}; \quad Q\gamma = \frac{\mu}{M}.$$

Quamobrem erit

$$\varepsilon M = -\pi z^2 \varepsilon z - 2r\pi z \varepsilon z - 4\pi r^2 \varepsilon z + \frac{8\pi r^3 \varepsilon z}{2r - z};$$

$$\varepsilon \mu = -\pi z^3 \varepsilon z - 2r\pi z^2 \varepsilon z - 4r^2 \pi z \varepsilon z - 8r^3 \pi \varepsilon z + \frac{16\pi r^4 \varepsilon z}{2r - z}.$$

Adeoque integrando per (226. §. 2. n.) juxta (Vol. I. §. 242. 249. 252. §.) obtinebimus.

$$M = 8\pi r^3 \log \frac{2r}{2r - z} - \frac{\pi z^3}{3} - r\pi z^2 - 4\pi r^2 z;$$

$$\mu = 16\pi r^4 \log \frac{2r}{2r - z} - \frac{\pi z^4}{4} - \frac{2r\pi z^3}{3} - 2\pi r^2 z^2 - 8\pi r^3 z.$$

Hoc modo determinatur tam maſſa M corporis pQq, quam diſtantia $Q\gamma$ illius centri gravitatis γ a vertice Q, pro qualibet abſciſſa $z = Qa$.

239. Problema.

Fig. 60. *Invenire maſſam et centrum gravitatis corporis* pQq *geniti revolutione arcus* Qp (60. Fig.) *ellipſeos ad axem tranſverſum* QB *relatae circa tangentem* QC *in vertice* Q.

Solutio.

1. Centrum gravitatis γ debet jacere in axe rotationis QC, ita ut, pro $pa = y$, $Qa = z$, $M = pQq$, et momento μ ejusdem maſ-

ſae

ſae reſpectu plani in Q ad QC perpendicularis debeat fieri (226. §. 1. 2. n.)

$$\partial M = \pi y^2 \partial z; \quad \partial \mu = \pi y^2 z \partial z; \quad Q\gamma = \frac{\mu}{M}.$$

2. Cum vero $z = Qa = pb$, et $y = ap = Qb$ ſint coordinatae orthogonae ellipſeos relatae ad axem transverſum QB ſumtum pro linea abſciſſarum; debet eſſe per (Vol. I. §. 525.)

$$z^2 = \frac{b^2 y}{a} - \frac{b^2 y^2}{a^2};$$ igitur debet eſſe

$$y^2 = \tfrac{1}{2} a^2 - \frac{a^2}{b^2} z^2 + \frac{a^2}{2b} \sqrt{(b^2 - 4z^2)}.$$

Hinc et ex (1) obtinebimus

$$\partial M = \tfrac{1}{2}\pi a^2 \partial z - \frac{\pi a^2}{b^2} z^2 \partial z + \frac{\pi a^2}{2b} \partial z \sqrt{(b^2 - 4z^2)};$$

$$\partial \mu = \tfrac{1}{2}\pi a^2 z \partial z - \frac{\pi a^2}{b^2} z^3 \partial z + \frac{\pi a^2}{2b} z \partial z \sqrt{(b^2 - 4z^2)}.$$

Quare integrando juxta (226. §. 2. n.) per (Vol. I. §. 242. 249. 248. 289. 238.) inveniemus

$$M = \tfrac{1}{2}\pi a^2 z - \frac{\pi a^2}{3b^2} z^3 + \frac{\pi a^2}{4b} z \sqrt{(b^2 - 4z^2)} + \frac{\pi b a^2}{8} \operatorname{Arc\,Sin} \frac{2z}{b};$$

$$\mu = \tfrac{1}{4}\pi a^2 z^2 - \frac{\pi a^2}{4b^2} z^4 - \frac{\pi a^2}{24b} \sqrt{(b^2 - 4z^2)^3} + \frac{\pi a^2 b^2}{24}.$$

Hinc itaque determinabitur tam maſſa $M = pQq$, quam diſtantia $Q\gamma = \frac{\mu}{M}$ illius centri gravitatis γ a vertice Q pro data quacunque abſciſſa $z = Qa$.

240. Corollarium 1.

Si Qb ſit ſemiaxis transverſus $= \tfrac{1}{2}a$, hinc pb ſemiaxis conjugatus $= \tfrac{1}{2}b$ ellipſeos; exhibebit pQq corpus revolutione quadrantis elliptici Qp circa illius tangentem QC in vertice Q geniti, cujus et maſſa M, et diſtantia $Q\gamma$ centri gravitatis γ a vertice Q invenietur pro $z = \tfrac{1}{2}b$ ex (239. §.), ut ſequitur.

$$M = \frac{(10 + 3\pi)}{48} \pi a^2 b; \quad Q\gamma = \frac{17 b}{4(10 + 3\pi)} = \frac{17}{2(10 + 3\pi)} . Qa.$$

241. Co-

241. Corollarium 2.

Ellipſis abit in circulum, ſi ejus axes a, b fiant aequales: ſi ergo in (239. §.) ponas $a = b$, obtinebis ſequentes expreſſiones pro maſſa M corporis pQq revolutione arcus circularis Qp circa illius tangentem QC geniti, ejus momento μ reſpectu plani in Q ad QC perpendicularis, et diſtantia ipſius centri gravitatis γ a puncto contactus Q, pro diametro $= a$ circuli, et quavis abſciſſa $z = Qa$.

$$M = \tfrac{1}{2}\pi a^2 z - \tfrac{1}{3}\pi z^3 + \frac{\pi a}{4} z\sqrt{(a^2 - 4z^2)} + \frac{\pi a^3}{8} \text{ Arc Sin } \frac{2z}{a};$$

$$\mu = \tfrac{1}{4}\pi a^2 z^2 - \frac{\pi z^4}{4} - \frac{\pi a}{24}\sqrt{(a^2 - 4z^2)^3} + \frac{\pi a^4}{24};$$

$$Q\gamma = \frac{\mu}{M}.$$

242. Corollarium 3.

Maſſa vero M corporis pQq revolutione quadrantis Qp circuli circa tangentem QC geniti, et diſtantia illius centri gravitatis γ a puncto contactus Q, erit pro ſemidiametro $z = Qa = \tfrac{1}{2}a$ (241. §.)

$$M = \frac{(10 + 3\pi)}{48}\pi a^3; \quad Q\gamma = \frac{17a}{4(10 + 3\pi)} = \frac{17}{2(10 + 3\pi)} \cdot Qa.$$

243. Corollarium 4.

Si ob (Vol. I. §. 550.) loco aequationis ad ellipſim $z^2 = \frac{b^2 y}{a} - \frac{b^2 y^2}{a^2}$ ſumas aequationem $z^2 = \frac{b^2 v}{a} + \frac{b^2 y^2}{a^2}$ ad hyperbolam in (239. §. 1. 2. n.); obtinebis ſequentes formulas pro maſſa M corporis pQq revolutione arcus pQ hyperbolae circa tangentem QC ad ejus verticem Q geniti, illius momento μ reſpectu plani in Q ad QC perpendicularis, et diſtantia $Q\gamma$ centri gravitatis γ a vertice Q.

$$\varepsilon M = \tfrac{1}{2}\pi a^2 \varepsilon z + \frac{\pi a^2}{b^2} z^2 \varepsilon z - \frac{\pi a^2}{2b} \varepsilon z \sqrt{(b^2 + 4z^2)};$$

$$\varepsilon \mu = \tfrac{1}{2}\pi a^2 z \varepsilon z + \frac{\pi a^2}{b^2} z^3 \varepsilon z - \frac{\pi a^2}{2b} z \varepsilon z \sqrt{(b^2 + 4z^2)};$$

$$Q\gamma = \frac{\mu}{M}.$$

Inte-

Integrando autem exponentes differentiales ∂M, $\partial \mu$ juxta (226. §. 2. u.) per (Vol. I. §. 242. 249. 248. 289. 238. §.) inveniemus

$$M = \tfrac{1}{2}\pi a^2 z + \frac{\pi a^2}{3b^2} z^3 - \frac{\pi a^2}{4b} z\sqrt{(b^2+4z^2)}$$

$$+ \frac{\pi a^2 b}{8} \log \frac{b}{2z+\sqrt{(b^2+4z^2)}}\,;$$

$$\mu = \tfrac{1}{4}\pi a^2 z^2 + \frac{\pi a^2}{4b^2} z^4 - \frac{\pi a^2}{24b}\sqrt{(b^2+4z^2)^3} + \frac{\pi a^2 b^4}{24}.$$

244. Problema.

Data aequatione ad lineam QX (59. Fig.) *inter coordinatas orthogonas* $z = Qa$, $y = pa$, *investigare centrum gravitatis ſuperficiei rotundae* pQq *revolutione lineae* Qp *circa axem abſciſſarum* QC *genitae.* Fig. 59.

Solutio.

1. Cum centrum gravitatis ſuperficiei rotundae pQq in axe rotationis QC debeat jacere (179. 183. §.); ſit illud in γ, et quaeratur ipſius diſtantia $Q\gamma$ a vertice Q: erit denotante M maſſam, et μ momentum ſuperficiei pQq reſpectu plani MN in Q ad QC perpendicularis, per (168. §.)

$$Q\gamma = \frac{\mu}{M}.$$

2. Cum porro debeat eſſe $\partial\mu = z\,\partial M$ (171. §.), ſi valor pro ∂M determinetur per (Vol. I. §. 491.), habebimus

$$\partial M = 2\pi y\sqrt{(\partial y^2 + \partial z^2)}\,;\quad \partial\mu = 2\pi z y\sqrt{(\partial y^2 + \partial z^2)}.$$

3. Quare, data aequatione ad lineam QX inter coordinatas $z = Qa$, $y = pa$, quaerantur ope calculi integralis maſſa M et momentum μ ex (2), tum definiatur diſtantia $Q\gamma$ per (1), quae generatim hoc modo exprimi poterit

$$Q\gamma = \frac{\int y z\sqrt{(\partial y^2 + \partial z^2)}}{\int y\sqrt{(\partial y^2 + \partial z^2)}}.$$

4. De reliquo, quia evaneſcente abſciſſa $z = Qa$, et ordinata $y = pa$, tam ſuperficies $M = pQq$, quam illius momentum μ reſpectu plani MN debet evaneſcere, perſpicuum eſt, integralia M, μ in (2) (3) nihilo de-

bere aequari, tam pro $z=0$, quam $y=0$, unde conſtantium determinatio pendet (Vol. I. §. 238.).

245. Corollarium 1.

Sit QX linea recta, adeoque XQZ ſuperficies conica, ejus axis $QC=a$, et radius baſeos $XC=r$; erit $pa=y=\frac{r}{a}z$: quare erit in (244. §. 2. n.)

$$\partial y=\frac{r}{a}\partial z;\ \sqrt{(\partial y^2+\partial z^2)}=\frac{\partial z}{a}\sqrt{(a^2+r^2)};$$

$$\partial M=\frac{2\pi r}{a^2}z\partial z\sqrt{(a^2+r^2)};\ \partial\mu=\frac{2\pi r}{a^2}z^2\partial z\sqrt{(a^2+r^2)};$$

$$M=\frac{\pi r}{a^2}z^2\sqrt{(a^2+r^2)};\ \ \mu=\frac{2\pi r}{3a^2}z^3\sqrt{(a^2+r^2)};$$

$$Q\gamma=\frac{\mu}{M}=\tfrac{2}{3}z=\tfrac{2}{3}Qa.$$

Nimirum diſtantia centri gravitatis γ ſuperficiei conicae pQq pro quavis abſciſſa $z=Qa$ ab ejus vertice Q aequatur duabus tertiis ejusdem abſciſſae: et ſic diſtantia centri gravitatis γ ſuperficiei convexae cujuslibet coni XQZ ab illius vertice QC aequalis eſt duabus tertiis axeos QC.

246. Corollarium 2.

Sit Qp arcus circuli $r=QC=XC$ deſcripti; erit aequatio ad QX

$$y^2=2rz-z^2:\ \ \text{igitur}\ \partial y=\frac{(r-z)\partial z}{\sqrt{(2rz-z^2)}}.$$

Pro maſſa M ſuperficiei convexae pQq ſegmenti ſphaerici, ejus momento μ reſpectu plani MN, et diſtantia $Q\gamma$ ipſius centri gravitatis γ a vertice Q habebimus itaque juxta (244. §.)

$$\partial M=2r\pi\partial z;\ \ \partial\mu=2r\pi z\partial z;$$

$$M=2r\pi z;\ \ \mu=r\pi z^2;\ \ Q\gamma=\tfrac{1}{2}z.$$

Medium ergo punctum altitudinis Qa ſegmenti ſphaerici pQq eſt centrum gravitatis illius ſuperficiei convexae; et ideo etiam medium

punctum

punctum radii QC perpendicularis ad baſim XRZS dimidiae ſphaerae eſt centrum gravitatis illius ſuperficiei convexae.

247. Corollarium 3.

Si Qp ſit arcus parabolae, proinde M=pQq ſuperficies convexa ſegmenti conoidis XQZ parabolici revolutione parabolae QX circa illius axem QC geniti, et γ centrum gravitatis ejusdem ſuperficiei; erit per (Vol. I. §. 508.) et (244. §.)

$$y^2 = pz; \quad \varepsilon y = \frac{p \varepsilon z}{2y};$$

$$\varepsilon M = \pi \varepsilon z \sqrt{(p^2 + 4pz)}; \quad \varepsilon \mu = \pi z \varepsilon z \sqrt{(p^2 + 4pz)};$$

$$Q\gamma = \frac{\mu}{M}.$$

Integralia vero M, μ determinabis per (Vol. I. §. 248. 282. 238.), ſic ut ſingula pro z=o aequentur nihilo.

248. Corollarium 4.

Quodſi autem Qp ſit arcus ellipſeos, et QC ejus ſemiaxis transverſus, hinc M=pQq ſuperficies convexa ſegmenti ſphaeroidis elliptici revolutione ellipſeos circa axem transverſum geniti, γ vero centrum gravitatis ejusdem ſuperficiei; erit per (Vol. I. §. 540.) et (244. §.)

$$y = \frac{b}{a} \sqrt{(az - z^2)}; \quad \varepsilon y = \frac{b}{2a} \cdot \frac{(a - 2z)\varepsilon z}{\sqrt{(az - z^2)}};$$

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon M &= \frac{\pi bc}{a^2} \varepsilon z \sqrt{\left(\frac{a^2 b^2}{c^2} + az - z^2\right)}; \\ \varepsilon \mu &= \frac{\pi bc}{a^2} z \varepsilon z \sqrt{\left(\frac{a^2 b^2}{c^2} + az - z^2\right)}; \end{aligned}\right\} \text{pro } c = 2\sqrt{(a^2 - b^2)}.$$

Quamobrem, cum exponentes hi differentiales per (Vol. I. §. 288. 294.) facile integrentur, ſi ſingula integralia per (Vol. I. §. 238.) ita definiantur, ut ea pro z=o aequentur nihilo; determinabitur eo ipſo diſtantia centri gravitatis γ a vertice Q, nimirum $Q\gamma = \frac{\mu}{M}$, pro qualibet altitudine z=Qa ſegmenti pQq: et ſi fiat $z = \frac{1}{2}b = QC$, reperietur diſtantia centri gravitatis ſuperficiei convexae dimidii ſphaeroidis elliptici XQZ ab ejus vertice Q.

249. Corollarium 5.

Et ſi Qp ſit arcus hyperbolae, cujus revolutione circa axem transverſum QC generetur ſuperficies convexa pQq conoidis hyperbolici; habebimus ob (Vol. I. §. 563.) per (244. §.) ſequentes expreſſiones pro maſſa M ſuperficiei pQq, ejus momento μ, et centro gravitatis γ: cum igitur exponentes differentiales ∂M, ∂μ per (Vol. I. §. 288. 294.) ſint perfecte integrabiles, ſi illorum integralia per (Vol. I. §. 238.) ſic determinentur, ut ſingula pro z = o aequentur nihilo, invenietur eo ipſo diſtantia Qγ centri gravitatis γ a vertice Q.

$$y = \frac{b}{2a}\sqrt{(az+z^2)}; \quad \partial y = \frac{b}{2a} \cdot \frac{(a+2z)\,\partial z}{\sqrt{(az+z^2)}}$$

$$\partial M = \frac{\pi b c}{a^2}\,\partial z\sqrt{\left(\frac{a^2b^2}{c^2}+az+z^2\right)};$$

$$\partial \mu = \frac{\pi b c}{a^2}\,z\,\partial z\sqrt{\left(\frac{a^2b^2}{c^2}+az+z^2\right)} \quad \text{pro } c = 2\sqrt{(a^2+b^2)}.$$

$$Q\gamma = \frac{\mu}{M}.$$

DISSER-

DISSERTATIONES

AD

MECHANICAM CORPORUM SOLIDORUM PERTINENTES.

DISSERTATIO VIII.
DE
MOTU PUNCTORUM AEQUABILI UNIFORMITERQUE ACCELERATO ET RETARDATO.

250. Definitio.

Quotiescunque aliquod corpus movetur, ſingula ejus puncta deſcribunt totidem lineas, jam rectas, jam curvas (38. §.): quodvis ergo punctum corporis moti poteſt in motu conſtitutum cogitari, atque hic motus erit *rectilineus* vel *curvilineus*, prout punctum eodem motu lineam rectam vel curvam deſcripſerit.

251. Corollarium 1.

Directio motus rectilinei manet perpetuo eadem per lineam rectam determinata, quam punctum mobile eodem motu deſcribit: in motu autem curvilineo directio ſingulis momentis mutatur (250. §.).

252. Corollarium 2.

Spatium, quod datum punctum ſuo motu intra certum tempus percurrat, determinabitur per longitudinem lineae, rectae vel curvae, quam illud eodem tempore percurrerit (250. §.).

253. Corollarium 3.

Creſcente ergo tempore, quo motus dati puncti duret, creſcet quoque ſpatium intra idem tempus percurſum (252. §.).

254. Definitio.

Uterque motus, rectilineus et curvilineus (250. §.), erit *aequabilis* ſeu *uniformis*, ſi ſpatia, quae punctum mobile intra quaecunque tempuſcula aequalia conficiat, fuerint inter ſe aequalia.

255. Corollarium 1.

Quodcunque ſpatiolum percurrat punctum motu aequabili progrediens intra determinatum tempuſculum, debebit illud 2*plo*, 3*plo*, m*plo* tempore conficere ſpatium pariter 2*plum*, 3*plum*, m*plum* (254. §.).

256. Co-

256. Corollarium 2.

Si ergo datum punctum progrediens motu aequabili tempore quocunque v conficiat ſpatium V; debebit illud tempore $u = v\frac{r}{n}$ *rplo* unius *ntae* partis temporis v conficere ſpatium $U = V\frac{r}{n}$ pariter *rplum* unius *ntae* partis ſpatii V. Si enim x ſit ſpatiolum tempuſculo $= v\frac{1}{n}$ percurſum, quia tempus v eſt *nplum* et tempus u *rplum* tempuſculi $v\frac{1}{n}$; debebit eſſe $V = xn$ et $U = xr$ (255. §.), hinc $x = V\frac{1}{n}$ et $U = V\frac{r}{n}$.

257. Definitio.

Omne punctum P in motu conſtitutum (250. §.) cenſetur quovis momento habere certam *Celeritatem* ſeu *Velocitatem*, quam recte definies, quod ſit intenſio motus punctum P ad ſpatium eo majus vel minus, quo ipſa eſt major vel minor, quovis tempore percurrendum determinans.

258. Corollarium 1.

Punctum incedens motu aequabili eadem perpetuo celeritate movebitur: et viciſſim motus puncti eadem conſtanter celeritate incedentis erit aequabilis (257. 254. §.).

259. Corollarium 2.

Celeritas dati puncti et ſpatium ab illo intra quodcunque tempus confectum erunt duo quanta heterogenea (257. 252. §.): proprie igitur nulla celeritas poterit aequari alicui ſpatio.

260. Theorema.

Spatia S, s, *quae a duobus punctis mobilibus* P, p *motu aequabili progredientibus intra datum quodcunque tempus percurruntur, erunt inter ſe ut celeritates* C, c *eorundem punctorum, ſeu erit* $S:s = C:c$.

Demonſtratio.

Cum mobile P perpetuo celeritate C, et p celeritate c incedat (258. §.), neceſſe eſt, ut quae ratio intercedit inter celeritates C, c, eadem intercedat etiam inter ſpatia S, s, quae a punctis P, p intra idem tempus percurruntur (257. §.), adeoque ſit $S:s = C:c$.

261. Theorema.

Spatia vero S, s, *vel ab uno puncto motu aequabili incedente, vel a duobus punctis motu aequabili parique celeritate progredientibus intra*

tempora

tempora inaequalia T, t *confecta, erunt inter ſe ut tempora, ſeu erit* $S:s=T:t$.

Demonſtratio.

Duo puncta P, p eadem celeritate motu aequabili incedentia percurrent intra idem tempus t ſpatia aequalia s, s (260. §.): quamobrem, ſi punctum P alio aliquo tempore T conficiat ſpatium S, demonſtrandum eſt, futurum $S:s=T:t$, quod ſequenti ratiocinio poteſt evinci.

1. Tempora T, t ſunt commenſurabilia aut incommenſurabilia (3. §.). Primo caſu dabitur aliquis numerus integer m vel fractus $\frac{m}{n}$, pro quo fiat $T=tm$ vel $T=t\frac{m}{n}$ (6. §.); adeoque etiam $S=sm$ vel $S=s\frac{m}{n}$ (255. 256. §.): utroque caſu erit itaque $S:s=T:t$.

2. Si autem tempora T, t ſint incommenſurabilia, dabitur pro quovis utcunque magno numero integro n alter numerus integer m, pro quo ſit (12. §.)

$$T > t\frac{m}{n} \text{ et ſimul } T < t\frac{m+1}{n}.$$

3. Sint s^1, S^1 ſpatia, quorum primum tempore $=t\frac{m}{n}$; et ſecundum tempore $=t\frac{m+1}{n}$ percurrat punctum P: quia per hypotheſim idem punctum conficit ſpatium s tempore t, et S tempore T; debebit eſſe

$$s^1=s\frac{m}{n} \text{ et } S^1=s\frac{m+1}{n} \quad \text{per (256. §.);}$$

$$S > s^1 \text{ et } S < S^1 \text{ ob (2) per (253. §.):}$$

$$\text{igitur } S > s\frac{m}{n} \quad \text{et ſimul } S > s\frac{m+1}{n}.$$

Hinc et ex (2) per (22. §.) obtinetur $S:s=T:t$.

262. Problema.

Spatia, Celeritates, et Tempora ad certas menſuras revocare, et per congruos numeros exprimere.

Solutio.

1. In conſtituendis menſuris datorum quantorum id perpetuo eſt obſervandum, ut quaevis menſura et quantum, pro quo illa deſideratur, ſint inter ſe duo quanta homogenea (14. §.).

2. Pro temporum ergo menſura tempuſculum aliquod debebit accipi (1): in ſequentibus erit nobis *minutum ſecundum* communis omnium temporum menſura.

3. Menſuram ſpatiorum indeterminatam relinquimus: ob (1) et (252 §.) aequabitur illa generatim certae lineolae l, puta uni pedi, vel pluribus pedibus.

4. Quia demum menſura celeritatum determinata quaepiam celeritas debet eſſe (1); ſumemus pro menſura celeritatis in quovis motu illam determinatam celeritatem φ, qua mobile motu aequabili incedens quovis minuto ſecundo percurreret ſpatiolum l pro ſpatii menſura acceptum (3).

E. gr. Si ſpatium a puncto P percurſum aequetur aliquot pedibus; erit unus pes menſura ejusdem ſpatii: pro menſura ergo celeritatis, qua punctum P progreditur, accipiemus illam determinatam celeritatem φ, qua punctum P, aut aliud quodcunque punctum, motu aequabili incedens unum pedem quovis minuto ſecundo deberet conficere.

5. Stabilitis hoc modo menſuris ſpatiorum, celeritatum et temporum, inveſtigentur exponentes rationum geometricarum eorundem quantorum ad aſſumtas menſuras: ſi enim hos exponentes ad easdem menſuras pro totidem unitatibus acceptas referas; obtinebis eo ipſo numeros denominatos, qui data ſpatia, datasque celeritates, et data tempora expriment (15. 16. 17. 18. §.).

263. Corollarium 1.

Deinceps ergo ubique ſolos exponentes rationum geometricarum ſpatiorum, celeritatum, et temporum ad menſuras eorundem (262. §. 2. 3. 4. n.) inveſtigabimus, quibus inventis ipſa ſpatia, celeritates, et tempora per (262. §. 5. n.) licebit determinare: atque hi exponentes ubique in ſequentibus formulis prae oculis habeantur, ubi ſpatia, celeritates, et tempora certis literis, puta C, S, T, deſignata fuerint.

264. Corollarium 2.

Si punctum P progrediens motu aequabili celeritate C percurrat ſpatium s intra unum minutum ſecundum; aliud vero punctum pariter motu aequabili incedens celeritate φ conficiat intra minutum ſecundum ſpatiolum l pro menſura ſpatii s aſſumtum; erit $C:\varphi = s:l$ (260. §.), hinc $\frac{C}{\varphi} = \frac{s}{l}$. Perſpicuum ergo eſt, in omni motu aequabili exponentem rationis

rationis celeritatis ad ejus menſuram φ aequari exponenti rationis ſpatii intra unum minutum ſecundum percurſi ad ejusdem menſuram l (262. §. 3. 4. n.): quare, literis C, s hos exponentes deinceps indicantibus, erit C = s (263. §.). Hoc, nulloque alio ſenſu dicetur *celeritas mobilis motu aequabili progredientis aequari ſpatiolo, quod idem mobile quovis minuto ſecundo conficit.*

Scholion.

Si e. gr. dicatur celeritas C puncti P motu aequabili incedentis eſſe octo pedum, et ideo ſcribatur C = 8 pedibus; expreſſio haec haud indicabit, celeritatem puncti P re ipſa aequari ſpatiolo octo pedum, quod utique abſurdum eſt (259. §.): celeritatem enim puncti P octo pedum eſſe tantundem ſignificat, ac eam eſſe puncti P celeritatem, qua illud quovis minuto ſecundo ſpatiolum s = 8 pedibus debet conficere; ita ut proprie nequeat poni C = 8, niſi per 8 intelligatur numerus abſtractus aequalis exponenti rationis geometricae celeritatis ad ipſius menſuram φ, nimirum ad celeritatem φ, qua motu aequabili unus pes quovis minuto ſecundo deberet confici (262. §. 4. n.); vel numerus denominatus relatus ad unitatem celeritati φ aequalem, quo caſu exprimeret C = 8 tantundem ac C = 8 φ, nimirum celeritatem 8*plam* celeritatis φ, ſicut ſpatium s erat 8*plum* unius pedis.

265. Corollarium 3.

Si punctum P incedens celeritate C motu aequabili conficiat uno minuto ſecundo ſpatiolum s, et tempore T ſpatium S; erit S : s = T : 1'' (261. §.): igitur, ſumta lineola l pro menſura ſpatiorum, erit etiam $\frac{S}{l} : \frac{s}{l} = T : 1''$, hinc $\frac{S}{l} = \frac{s}{l} \cdot \frac{T}{1}$, ſeu $\frac{S}{l} = \frac{C}{\varphi} \cdot \frac{T}{1}$ (264. §.). Exponens itaque rationis ſpatii quovis tempore confecti ad ejus menſuram l aequatur producto ex exponente rationis celeritatis ad ipſius menſuram φ in exponentem rationis temporis ad ejusdem menſuram 1'' (262. §. 3. 4. 2. n.): eapropter, ſi iidem exponentes deſignentur literis S, C, T, poni poterit S = CT, quae aequatio improprie indicabit, *ſpatium motu aequabili data celeritate quovis tempore percurſum aequale eſſe producto ex celeritate in tempus.*

266. Corollarium 4.

Habebimus ergo $\frac{S}{C} = T$ (265. §.), id eſt: exponens rationis ſpatii motu aequabili quacunque celeritate et quocunque tempore percurſi ad ipſius menſuram diviſus per exponentem rationis celeritatis ad ejus menſuram dabit pro quoto exponentem rationis temporis ad ejusdem menſuram (262. §. 2. 3. 4. n.); improprie vero dicetur *ſpatium diviſum per celeritatem aequari tempori, quo illud percurritur.*

267. Corollarium 5.

Erit porro $\frac{S}{T} = C$ (265. §.), id eſt: ſi exponens rationis ſpatii, motu aequabili quacunque celeritate intra certum tempus percurſi, ad ejus menſuram dividatur per exponentem rationis temporis ad ipſius menſuram; erit quotus aequalis exponenti rationis celeritatis ad ejusdem menſuram (262. §. 2. 3. 4. n.); improprie autem dicetur *ſpatium diviſum per tempus dare celeritatem pro quoto.*

Scholion.

Per haec pauca principia omnis motus aequabilis poteſt determinari, ſeu datis celeritate et tempore quaeratur ſpatium; ſeu datis celeritate et ſpatio deſideretur tempus; ſeu datis ſpatio et tempore petatur celeritas.

Ponamus e. gr. punctum P incedere motu aequabili celeritate 8 pedum (264. §.), petique ſpatium S, quod illud intra 12 minuta ſecunda conficiat; erit per (265. 263. §.)

$$S = 8 \cdot 12 = 96 \text{ pedibus.}$$

Si autem conſtet, datum punctum progredi motu aequabili celeritate 6 pedum, et quaeratur tempus T, quo ſpatium 120 pedum poſſit ab illo confici; erit per (266. 263. §.)

$$T = \frac{120}{6} = 20 \text{ minutis ſecundis.}$$

Si denique dicas, punctum P progrediens motu aequabili ſpatium 104 pedum intra 13 minuta ſecunda percurrere, et quaeras ejus celeritatem; invenies per (267. 264. §.)

$$C = \frac{104}{13} = 8 \text{ pedibus.}$$

268. De-

268. Definitio.

Motum, in quo celeritas continuo mutatur, creſcit videlicet vel decreſcit, vocant *inaequabilem* ſeu *difformem*, et quidem *acceleratum* caſu primo, *retardatum* vero caſu altero.

269. Corollarium 1.

Omnis motus dati puncti erit neceſſario vel aequabilis vel inaequabilis (258. 268. §.).

270. Corollarium 2.

Species autem motuum inaequabilium, tam acceleratorum, quam retardatorum, ſunt numero infinitae poſſibiles, pendentes a totidem legibus, quibus celeritates poſſunt creſcere et decreſcere (268. §.).

271. Corollarium 3.

Celeritas puncti P motu inaequabili incedentis continuo mutatur; ſi ejus motus duret quocunque tempore T, habebit illud in fine temporis T determinatam aliquam celeritatem C, ita tamen, ut et aliam habuerit proxime praecedente momento, et aliam ſit habiturum proxime ſequente momento (268. §.). Hoc ſenſu vocabitur C *celeritas debita tempori* T, poteritque ea aeſtimari ex ſpatio, quod punctum mobile hac ipſa celeritate motu aequabili progrediens intra unum minutum ſecundum conficeret, juxta (264. §.).

Si e. gr. celeritas, quam punctum P motu inaequabili progrediens in fine 12 minutorum ſecundorum ab initio ejusdem motus effluxorum habeat, dicatur eſſe 8 pedum; indicabit id talem eſſe puncti P celeritatem C, qua, ſi illud hac ipſa celeritate motu aequabili incederet, quovis minuto ſecundo ſpatiolum octo pedum deberet conficere.

272. Corollarium 4.

Si punctum P motu accelerato percurrat tempuſculo t ſpatiolum x, celeritas vero ejus initio tempuſculi t ſit c, et in fine tempuſculi t ſit c'; neceſſe eſt, ut ſpatiolum x majus ſit ſpatiolo ct et ſimul minus ſpatiolo c't, quorum primum celeritate c, et ſecundum celeritate c' motu aequabili intra tempuſculum t poteſt confici (265. 268. 257. §.).

273. Corollarium 5.

Si autem motus puncti P ſit retardatus, punctumque P conficiat hoc motu ſpatiolum x intra tempuſculum t, ejus vero celeritas initio tempuſculi t ſit c, et in fine tempuſculi t ſit c^{I}; debebit ſpatiolum x minus eſſe ſpatiolo ct, et ſimul majus ſpatiolo $c^{I}t$, quorum primum vel ſecundum a puncto P tempuſculo t deberet confici, ſi illud celeritate c vel c^{I} motu aequabili incederet (265. 268 257. §.).

274. Definitio.

Inter omnes motus inaequabiles (270. §.) maxime memorabilis eſt motus *uniformiter acceleratus* et *retardatus:* in primo ſunt incrementa, et in ſecundo decrementa celeritatis duobus quibuscunque temporibus ab initio ejusdem motus genita inter ſe in ratione directa temporum. Poteſt autem motus uniformiter acceleratus vel de quiete, adeoque nulla celeritate, vel determinata quapiam celeritate γ inchoari: illum vocabimus *purum*, et hunc *affectum*.

275. Corollarium 1.

Quare, ſi punctum P progrediens motu uniformiter accelerato vel retardato temporibus T, t ab initio ejusdem motus computatis capiat incrementa, vel patiatur decrementa celeritatis C, c; erit $C:c = T:t$ (274. §.).

276. Corollarium 2.

Si ergo in ſpecie K denotet incrementum vel decrementum celeritatis puncti P motu uniformiter accelerato progredientis debitum uni minuto ſecundo; erit $C:K = T:1''$, hinc $C = KT$ (263. §.) incrementum vel decrementum celeritatis debitum tempori T: punctum ergo P habebit in fine temporis T celeritatem $C = KT$, ſi ejus motus uniformiter acceleratus purus ſit; celeritatem vero $\gamma + KT$ vel $\gamma - KT$, ſi illud celeritate γ motum uniformiter acceleratum affectum, vel uniformiter retardatum inchoet (274. §.).

277. Problema.

Punctum P *progreditur motu uniformiter accelerato, vel uniformiter retardato; incrementum vel decrementum celeritatis primo minuto ſecundo genitum eſt* K: *invenire ſpatium* S, *quod illud dato quocunque tempore* T *ab initio ejusdem motus computato debet percurrere.*

Solutio.

Solutio.

1. Sí M, N ſint duo quanta determinatae magnitudinis, pro quibus et tertio quanto S ſemper ſit $S > M - N\frac{1}{m}$ et ſimul $S < M + N\frac{1}{m}$, quantumcunque magnum numerum integrum denotet m; cum ſemper ſit poſſibilis ejusmodi numerus integer m, pro quo pars *mta* $N\frac{1}{m}$ quanti N minor fieret quovis dato utcunque parvo quanto homogeneo (11. §.): erit neceſſario $S = M$ (Vol. I. §. 129.).

2. Totum jam tempus T, quo motus puncti P uniformiter acceleratus vel retardatus durare ſupponitur, cogitetur diviſum in numero m tempuſcula aequalia t, t, t, - - - t, quorum quodvis ſit $t = \frac{T}{m}$ pars *mta* temporis T.

3. Debebit punctum P ſingulis tempuſculis t, t, t, - - - t ordine naturali ſibi ſuccedentibus certa ſpatiola percurrere, quae omnia ſimul conſtituent ſpatium S toto tempore T ex iisdem tempuſculis compoſito percurſum.

4. Spatium S in (3) per (272. 273. §.) erit ergo, prout motus puncti P fuerit acceleratus vel retardatus, majus vel minus, quam ſumma ſpatiolorum, quae a puncto P ſingulis tempuſculis t, t, t, - - - t (2) deberent confici, ſi illud quovis tempuſculo illa determinata celeritate, quam habet initio ejusdem tempuſculi, motu aequabili incederet.

5. Idem porro ſpatium S in (3) per (272. 273. §.), prout motus puncti P fuerit acceleratus vel retardatus, debebit eſſe minus vel majus quam ſumma ſpatiolorum, quae a puncto P ſingulis tempuſculis t, t, t, - - - - t (2) deberent percurri, ſi illud quovis tempuſculo motu aequabili illa determinata celeritate progrederetur, quam habet in fine ejusdem tempuſculi.

6. Celeritas, quam punctum P in fine cujuscunque temporis T debet habere, eſt generatim $\gamma \pm KT$, ſigno + adhibito pro motu accelerato, et — pro retardato, ita ut ſit $\gamma = 0$ pro motu uniformiter accelerato puro, vel γ celeritas initialis, qua punctum P motum uniformiter acceleratum affectum, aut uniformiter retardatum inchoet (276. §.): quodſi ergo in hac expreſſione loco T terminos ſeriei t, 2t, 3t, 4t, - - - (m—1) t, mt ſucceſſive ſubſtituas, obtinebis ſequentes expreſſiones celeritatum, quas

quas punctum P in fine ſingulorum m tempusculorum t, t, t, - - - t ab initio motus ordine naturali ſibi ſuccedentium (2) debet habere.

$$\gamma \pm Kt; \ \gamma \pm K.2t; \ \gamma \pm K.3t; \ ------ \ ---- \gamma \pm K(m-1)t; \ \gamma \pm K.mt.$$

7. Quare, cum punctum P ſuum motum acceleratum vel retardatum celeritate γ inchoare ſupponatur, adeoque hanc ipſam celeritatem initio primi tempusculi t (2) habeat; cumque illud tantum celeritatem initio cujusvis ſubſequa tempusculi, quantam habet in fine proxime praecedentis tempusculi, debeat habere: habebit punctum P initio ſingulorum m tempusculorum t, t, t, - - - t ab initio motus ordine naturali ſibi ſuccedentium (2) ſequentes celeritates, ob (6).

$$\gamma; \ \gamma \pm Kt; \ \gamma \pm K.2t; \ \gamma \pm K.3t; \ ---- \ \gamma \pm K(m-1)t.$$

8. Singulae celeritates in (6) ductae in t dabunt ergo per (265. §.) ſequentem ſeriem ſpatiolorum, quae punctum P ſingulis tempusculis t, t, t, - - - t ab initio motus ordine naturali ſibi ſuccedentibus percurreret, ſi id quovis tempusculo illa determinata celeritate, quam habet in fine, ejusdem tempusculi, motu aequabili incederet.

$$\gamma t \pm Kt^2; \ \gamma t \pm K.2t^2; \ \gamma t \pm K.3t^2; \ ----- \ ----- \gamma t \pm K(m-1)t^2; \ \gamma t \pm K.mt^2.$$

9. Singulae vero celeritates in (7) ductae in t dabunt per (265. §.) ſequentem ſeriem ſpatiolorum, quae a puncto P ſingulis tempusculis t, t, t, - - - t ab initio motus ordine naturali ſibi ſuccedentibus deberent confici, ſi illud quovis tempusculo ea celeritate, quam habet initio ejusdem tempusculi, motu aequabili progrederetur.

$$\gamma t; \ \gamma t \pm Kt^2; \ \gamma t \pm K.2t^2; \ \gamma t \pm K.3t^2; \ ---------- \ \gamma t \pm K(m-1)t^2.$$

10. Quamobrem obtinebimus, ob (4) (5) per (8) (9) ſequentes expreſſiones.

Pro motu accelerato:

$$S > \begin{cases} (\gamma + \gamma + \gamma + \gamma + ----- + \gamma)\,t \\ + K(1 + 2 + 3 + --- + (m-1))\,t^2; \end{cases}$$

$$S < \begin{cases} (\gamma + \gamma + \gamma + ----- + \gamma)\,t \\ + K(1 + 2 + 3 + ------ + m)\,t^2. \end{cases}$$

Pro

Pro motu retardato,

$$S < \begin{cases} (\gamma+\gamma+\gamma+\gamma+------+\gamma)t \\ -K(1+2+3+---+(m-1))t^2; \end{cases}$$

$$S > \begin{cases} (\gamma+\gamma+\gamma+------+\gamma)t \\ -K(1+2+3+------+m))t^2. \end{cases}$$

Cumque ſit $1+2+3+---+(m-1)=\frac{1}{2}(m^2-m)$; $1+2+3+---+m=\frac{1}{2}(m^2+m)$; et per hypotheſim in (2) $t=\frac{T}{m}$: habebimus etiam

pro motu accelerato

$$S > \gamma T+\tfrac{1}{2}KT^2-\tfrac{1}{2}KT^2.\frac{1}{m};$$

$$S < \gamma T+\tfrac{1}{2}KT^2+\tfrac{1}{2}KT^2.\frac{1}{m}:$$

et pro motu retardato

$$S < \gamma T-\tfrac{1}{2}KT^2+\tfrac{1}{2}KT^2.\frac{1}{m};$$

$$S > \gamma T-\tfrac{1}{2}KT^2-\tfrac{1}{2}KT^2.\frac{1}{m}.$$

Ex his autem expreſſionibus, cum illae pro quovis poſſibili numero integro m in (2) debeant ſubſiſtere, fluit per (1) ſequens expreſſio generalis quaeſiti ſpatii S, in qua ſignum + vel — debet adhiberi, prout motus puncti acceleratur vel retardatur.

$$S=\gamma T\pm\tfrac{1}{2}KT^2.$$

278. Corollarium 1.

Punctum P progrediens motu uniformiter accelerato puro (274. §.), ſi id primo minuto ſecundo acquirat celeritatem K, percurret quovis tempore T ab initio motus computato per (277. §.) ſpatium $S=\frac{1}{2}KT^2$.

279. Corollarium 2.

Si punctum P incedens motu uniformiter accelerato puro intra tempus T acquirat celeritatem $C=KT$ (276. §.), quo fit $K=\frac{C}{T}$; debebit illud tempore T per (278. §.) conficere ſpatium $S=\frac{1}{2}CT$.

280. Corollarium 3.

Punctum P progrediens motu uniformiter accelerato puro per ſpatium S tempore T tantam habebit in fine ejusdem temporis celeritatem C, ut, ſi illud hac ipſa celeritate motu aequabili incederet, intra idem tempus T ſpatium duplum $2S = CT$ deberet percurrere (279. 265. §.).

281. Corollarium 4.

Spatia S, s motu uniformiter accelerato puro temporibus inaequalibus T, t ab initio ejusdem motus computatis percurſa erunt inter ſe ut quadrata temporum: erit enim per (278. §.)

$$S = \frac{1}{2} K T^2; \quad s = \frac{1}{2} K t^2:$$

$$\text{igitur} \quad S : s = T^2 : t^2.$$

282. Corollarium 5.

Eadem ſpatia S, s motu uniformiter accelerato puro temporibus T, t ab initio motus computatis confecta erunt inter ſe ut quadrata celeritatum C, c iisdem temporibus genitarum: cum enim ſit per (281. §.)

$$S : s = T^2 : t^2; \text{ et per } (275. §.)$$

$$T : t = C : c : \text{ erit } S : s = C^2 : c^2.$$

283. Corollarium 6.

Totum tempus T, quo motus uniformiter acceleratus purus puncti P duret, cogitetur dividi in quaecunque tempuscula aequalia t, t, t, t, - - - t; intra numero m tempuscula tempus $= tm$ conſtituentia ſit percurſum ſpatium S, et s ſit ſpatium confectum intra numero $m - 1$ tempuscula conſtituentia tempus $= t(m - 1)$: erit $S - s$ ſpatiolum ſolo mto tempusculo percurſum, et per (278. §.) habebimus

$$S = \frac{1}{2} K . m^2 t^2; \quad s = \frac{1}{2} K (m - 1)^2 t^2:$$

$$S - s = \frac{1}{2} K (2m - 1) t^2.$$

284. Corollarium 7.

Pro $m = 1, m = 2, m = 3, m = 4$, et ſic porro, obtinebuntur ex $2m - 1$ numeri impares 1, 3, 5, 7, etc. ordine naturali creſcentes: ſpatiola ergo, quae datum punctum P motu uniformiter accelerato puro progrediens ſingulis tempusculis aequalibus t, t, t, - - - t ab initio motus ordine naturali ſibi ſuccedentibus conficiat, erunt inter ſe ut numeri impares

pares 1, 3, 5, 7, etc. ordine naturali creſcentes, ſeu ut termini feriei $\frac{1}{2}Kt^2.1$, $\frac{1}{2}Kt^2.3$, $\frac{1}{2}Kt^2.5$; $\frac{1}{2}Kt^2.7$, etc. (283. §.).

285. Corollarium 8.

Quodlibet punctum P progrediens motu uniformiter accelerato affecto, data celeritate γ inchoato, capiet intra primum minutum ſecundum certum incrementum K celeritatis γ, et percurret quovis tempore T ab initio ejusdem motus computato ſpatium $S = \gamma T + \frac{1}{2}KT^2$ (274. 277. §.) aequale ſummae ſpatiorum, quorum unum γT motu aequabili celeritate initiali γ, et alterum $\frac{1}{2}KT^2$ motu uniformiter accelerato puro intra idem tempus T deberet confici (265. 278. §.).

286. Corollarium 9.

Pro celeritate initiali γ motus uniformiter retardati, et decremento K, quod illa primo minuto ſecundo patiatur, percurretur quovis tempore T ab initio ejusdem motus computato ſpatium $S = \gamma T - \frac{1}{2}KT^2$ (277. §.) aequale differentiae ſpatiorum, quorum unum γT motu aequabili celeritate initiali γ, et alterum $\frac{1}{2}KT^2$ motu uniformiter accelerato puro intra idem tempus T deberet confici (265. 278. §.), ſi in hoc iisdem gradibus creſceret celeritas, quibus gradibus illa in motu retardato decreſcit, quo decrementum K genitum primo minuto ſecundo in motu retardato aequetur celeritati, quam punctum mobile motu accelerato intra primum minutum ſecundum acquirat.

287. Corollarium 10.

Celeritas, quam punctum mobile P progrediens motu uniformiter retardato, celeritateque γ inchoato, intra tempus T ab initio ejusdem motus computatum acquiret, ſi K ſit decrementum celeritatis primo minuto ſecundo genitum, erit $C = \gamma - KT$ (276. §.): quare pro $T = \frac{\gamma}{K}$ evaneſcet celeritas C. Tempus ergo, quo motus uniformiter retardatus puncti P poteſt durare, eſt $T = \frac{\gamma}{K}$, quo in (286. §.) ſubſtituto obtinebitur ſpatium, quod punctum P intra totum tempus, quo ejus motus uniformiter retardatus duraverit, conficiet, nimirum

$$S = \gamma \frac{\gamma}{K} - \frac{1}{2}K . \frac{\gamma^2}{K^2} = \frac{\gamma^2}{2K}.$$

 288. Co-

288. Corollarium II.

Per (278. §.) fit $S = \frac{\gamma^2}{2K}$ ſpatium, quod punctum mobile P motu uniformiter accelerato puro intra tempus $T = \frac{\gamma}{K}$ conficeret; ſpatium ergo, quod punctum P progrediens motu uniformiter retardato celeritateque γ inchoato intra totum tempus, quo idem motus duraverit, conficiet (287. §.), aequatur ſpatio, quod motu uniformiter accelerato puro intra idem tempus poteſt confici, ſi in hoc iisdem gradibus creſcat celeritas, quibus illa in motu retardato decrevit.

289. Definitio.

Punctum mobile, quod aut quieſcit, aut eadem perpetuo celeritate et directione movetur, *in eodem ſtatu quietis vel motus perſeverare* dicitur: quodſi autem datum punctum de quiete ad motum concitetur, vel actu in motu conſtitutum certam mutationem in directione vel celeritate ſubeat; dicetur id *ſuum ſtatum mutare.* Ubi autem de corpore mobili ſermo fuerit, dicetur illud *in eodem ſtatu perſeverare*, vel *ſuum ſtatum mutare*, prout vel omnia ejus puncta (250. §.) in eodem ſtatu perſeveraverint, vel omnia aut aliqua ſuum ſtatum mutaverint.

290. Corollarium.

Mutationes ſtatus cujuslibet mobilis, puncti et corporis, ſunt numero infinitae poſſibiles (289. 270. §.); nihil vero reperitur in ipſis mobilibus, quod videatur exigere, ut, dum illa ſuum ſtatum mutant, hanc potius quam aliam quamcunque mutationem ſubeant: ne igitur ſine omni fundamento mobilibus, punctis vel corporibus, aliquid, quod iis non competat, adtribuamus; quotiescunque certum mobile ſuum ſtatum mutaverit, cauſam hujus mutationis extra ipſum quaeremus, ac ſi illud ſe ipſum ad mutationem ſui ſtatus nulla ratione poſſet determinare.

Scholion.

Argumentis quidem evidentibus deſtituimur, quibus evincere liceat, omnia mobilia ſic eſſe comparata, ut illa nunquam poſſint ſe ipſa ad mutationem ſui ſtatus determinare, cauſas proinde omnium mutationum, quas ſtatus mobilium ſubeant, extra illa neceſſario eſſe quaerendas. Non eſt tamen, cur metuamus, ne, ſi huic ſententiae univerſa motus theoria ſuperſtruatur, eadem theoria naturae corporum adverſetur, cum omnia

con-

conſectariis indidem legitime fluentia cum perpetuis obſervationibus, quas circa naturam corporum adhuc facere licuit, quam optime conſentiant, ita ſane ut hoc ipſo conſenſu ea ſententia extra omne dubium poni videatur.

291. Definitio.

Inertia mobilis, puncti et corporis, eſt ejus impotentia ſe ipſum determinandi ad mutationem ſui ſtatus; mobile inertia praeditum, vocatur *iners*.

292. Corollarium 1.

Inertia eſt communis omnium mobilium proprietas, vi cujus illa in eodem perpetuo ſtatu, in quem ſemel fuerint repoſita, debebunt perſeverare, niſi is ab externis cauſis turbetur (290. 291. §.).

293. Corollarium 2.

Quodlibet punctum mobile, ſi id quieſcat, perpetuo quieſcet, niſi ipſum externa aliqua cauſa ad motum determinet: ſi autem datum punctum mobile actu moveatur, debebit illud ſecundum eandem directionem eademque celeritate motu aequabili progredi, niſi hanc vel illam, aut utramque externae cauſae mutent (292. 289. 258. §.).

294. Definitio.

Cauſae externae omnis motus ſunt vires motrices (38. §.), aliae *abſolutae* ſeu *invariabiles*, et *reſpectivae* aliae ſeu *variabiles*. Vis *abſoluta* vocatur, quae eadem conſtanter efficacia datum mobile ad motum urget, ſeu illud quieſcat, ſeu moveatur; vis autem *variabilis* eſt, quae quovis momento, durante motu, alia efficacia agit in mobile.

295. Corollarium.

Sicut vires agentes in puncta quieſcentia per totidem pondera poſſunt exprimi; ſic quoque quaelibet vis agens in datum punctum in motu conſtitutum poterit uni ponderi aequari, quod aut idem perpetuo maneat, aut durante motu continuo mutetur, prout vis agens fuerit invariabilis vel variabilis (294. 62. §.).

296. Definitio.

Effectus genuinus cujuslibet vis motricis datum mobile ad motum continuo ſollicitantis intra certum tempus productus eſt ſpatium, per quod

mobile hoc tempore ob ſolam vis illud urgentis actionem eodem tempore exertam propellitur.

297. Corollarium 1.

Si vis V punctum P ad motum continuo ſollicitans certo momento ceſſet agere in punctum P; punctum hoc haud quieſcet, ſed motum, ad quem id determinatum fuerit, vi ſuae inertiae continuabit, celeritatem, quam eo momento habuerit, perpetuo conſervaturum, niſi ejus motui aliqua cauſa adverſetur (292. 293. §.): dum ergo punctum P a vi V tempuſculis a, b, c, - - - - p, q, r, - - - - z ad motum continuo ſollicitatur; debet id quovis tempuſculo q et a vi V per certum ſpatiolum propelli, et ob celeritatem intra tempuſcula a, b, c, - - - p acquiſitam, quam illud vi ſuae inertiae toto tempuſculo q conſervare cogitur, certum ſpatiolum conficere. Quare ſi punctum P a vi V ad motum continuo ſollicitatum tempore quocunque T ex tempuſculis a, b, c, - - - z compoſito ſpatium S dicatur percurrere; neceſſe eſt, ut iſtud ſit in duas partes reſolubile, quarum una ob inertiam puncti P, altera vero ob ſolam actionem vis V eodem tempore exertam percurſa ſit, ita ut genuinus effectus vis V hoc tempore productus unam duntaxat partem totius ſpatii S exaequet (296. §.).

298. Corollarium 2.

Hinc evidenter elucet, qui poſſit fieri, ut utcunque cognito ſpatio S, quod datum punctum P a data vi V ad motum continuo ſollicitatum intra certum tempus T conficiat, effectus genuinus vis V eodem tempore productus penitus ignoretur (297. §.).

299. Corollarium 3.

Quia vero omnis puncti P in motu conſtituti celeritas, independens ab ejus inertia (292. 293. §.), neceſſario ab aliqua vi debet generari; perſpicuum eſt, nullos effectus genuinos a datis viribus totidem puncta ad motum continuo ſollicitantibus intra determinatum tempus T poſſe produci, quin illae hac ipſa productione certas celeritates ab iisdem effectibus, quidquid ii ſint (298. §.), ita dependentes generent, ut aequalibus effectibus celeritates pariter aequales, majoribus vero minoribusque effectibus celeritates quoque majores minoresque reſpondeant (296. 257. §.).

300. Corollarium 4.

Quamobrem, ſi quotcunque puncta mobilia a totidem viribus invariabilibus et inter ſe aequalibus, vel variabilibus, quae tamen, utcunque creſcentes vel decreſcentes, quovis momento durante motu inter ſe aequales maneant, ad motum ſecundum datas directiones continuo ſollicitentur; debebunt omnia puncta pari efficacia quovis momento ad motum urgeri (294. §.), ſingulae idcirco vires producent intra quodvis determinatum tempus et effectus aequales (296. §.), et celeritates aequales (299. §.).

301. Corollarium 5.

Quodſi vero duo puncta P, p a duabus viribus invariabilibus et inaequalibus U, u ad motum continuo ſollicitentur; neceſſe eſt, ut efficacia, qua punctum P a vi majori U ad motum quovis momento urgetur, major ſit quam efficacia, qua punctum p a vi minori u ad motum quovis momento impellitur (294 §.): vis major U producet ergo quovis tempore T et effectum et celeritatem majorem, quam vis minor u (296. 299. §.).

302. Theorema.

Si punctum P *celeritate quacunque* γ *aliunde ad motum determinatum a data vi* V *tempore* T *ad motum continuo ſollicitetur; debebit vis* V *hoc tempore certam celeritatem* c *producere, punctumque* P *habebit in fine temporis* T *celeritatem aequalem ſummae vel differentiae celeritatum* γ, c, *prout directio, ſecundum quam vis* V *agit in punctum* P, *eadem eſt cum directione, ſecundum quam punctum* P *celeritate* γ *ad motum aliunde eſt determinatum, vel illi oppoſita.*

Demonſtratio.

Punctum P cogitur vi ſuae inertiae quamvis celeritatem, ad quam illud a certa vi determinatur, et recipere, et perpetuo conſervare (292. 293. §.): quaelibet autem vis, niſi ipſius actio penitus impediatur, debet ſingulis tempuſculis conſtituentibus tempus T, quo punctum P ab illa ad motum continuo ſollicitatur, et effectus aliquos, et certas celeritates producere (296. 299. §.); quae ſimul ſumtae conſtituent celeritatem c toto tempore T productam. Eapropter, ſi punctum P initio temporis T habeat jam celeritatem aliquam γ, debebit haec cum celeritate c ita componi, ut punctum P in fine temporis T habeat celeritatem vel ſummae

celeri-

celeritatum γ, c, vel differentiae earundem aequalem, prout nimirum directio, ſecundum quam punctum P celeritate γ aliunde eſt ad motum determinatum, eadem eſt cum directione vis V, vel ei oppoſita.

303. Corollarium 1.

Quaevis vis invariabilis, datum punctum mobile P ad motum continuo ſollicitans, eundem intra idem tempus producet effectum, eandemque celeritatem, ſeu punctum P initio ejusdem temporis quieſcat, ſeu aliunde ſit ad motum determinatum (294. 295. 299. §.): punctum ergo P, celeritate γ aliunde ad motum determinatum, et a data vi invariabili V ad motum ſecundum eandem vel oppoſitam directionem tempore T continuo ſollicitatum, habebit in fine temporis T celeritatem aequalem ſummae, caſu primo, vel differentiae, caſu ſecundo, celeritatum γ, c, quarum poſteriorem c vis V intra tempus T produceret, ſi illa punctum P de quiete ad motum determinaret, temporeque T ad motum continuo urgeret (302. §.). Et generatim creſcente tempore T, quo punctum P urgetur a vi invariabili V, creſcet neceſſario etiam celeritas puncti P, ſi ſecundum eandem directionem punctum P et determinatum ſit jam ad motum, et ad motum a vi V impellatur.

304. Corollarium 2.

Vis invariabilis V datum punctum P de quiete ad motum determinans, et ad motum numero m tempusculis aequalibus t, t, t, - - - t tempus T conſtituentibus continuo ſecundum determinatam directionem ſollicitans, producet ſingulis tempusculis t aequales effectus (294. 296. §.), et aequales celeritates, puta g, g, g, - - - g (299. §.), quae celeritatem $= gm$ toto tempore T productam conſtituent: punctum ergo P habebit in fine primi tempusculi t celeritatem $= g$, et in fine m*pli* temporis $T = tm$ celeritatem $= gm$ pariter m*plam*: ſi autem punctum P initio temporis T ad motum celeritate γ ſecundum eandem directionem, aut oppoſitam, aliunde fuerit determinatum; erit ejus celeritas in fine temporis T aequalis ſummae caſu primo, vel differentiae celeritatum γ, gm caſu ſecundo (303. §.).

305. Corollarium 3.

Quare ſi punctum P a vi invariabili V ad motum ſecundum determinatam directionem continuo ſollicitatum capiat intra quodcunque tempus x incrementum vel decrementum celeritatis y; debebit illud intra tempus

X =

$X = x\frac{r}{n}$ *rplum* unius *ntae* partis temporis x capere incrementum vel decrementum celeritatis $Y = y\frac{r}{n}$ pariter *rplum* unius *ntae* partis incrementi vel decrementi y. Si enim v denotet incrementum vel decrementum genitum tempusculo $= x\frac{1}{n}$; erit $y = vn$ et $Y = vr$ (304. §.); hinc $v = y\frac{1}{n}$ et $Y = y\frac{r}{n}$.

306. Corollarium 4.

Aſt ſi punctum P vel quieſcat initio temporis T, vel celeritate γ aliunde ſit ad motum determinatum, et a vi variabili V ad motum ſecundum eandem vel oppoſitam directionem tempore T continuo ſollicitetur; neceſſe eſt, ut vis V ſingulis tempuſculis aequalibus t, t, t, - - - t tempus *mplum* $T = tm$ conſtituentibus inaequales effectus (294. 296. §.), et inaequales celeritates $\alpha, \beta,$ - - - μ producat (299. §.), quae celeritatem c toto tempore T productam conſtituant: punctum P habebit ergo in fine tempuſculi primi t celeritatem aequalem ſummae vel differentiae celeritatum γ, α, et in fine temporis T celeritatem aequalem ſummae vel differentiae celeritatum γ, c (302. §.), quin ideo incrementum aut decrementum c celeritatis initialis ſit *mplum* incrementi vel decrementi α, ſicut eſt tempus T *mplum* tempuſculi t.

307. Theorema.

Omnis vis, quae datum punctum P ſecundum determinatam directionem ad motum continuo ſollicitans motum ejusdem puncti uniformiter accelerat vel retardat, debet eſſe invariabilis: et viciſſim vis invariabilis motum puncti P uniformiter accelerabit vel retardabit, prout nimirum punctum P eo momento, quo vis illa in id agere incipit, quieſcit, aut certa celeritate γ ad motum ſecundum eandem vel oppoſitam directionem aliunde eſt determinatum.

Demonſtratio.

Pars prima theorematis per ſe ex (306. §.) ſequitur; in motu enim uniformiter accelerato vel retardato debet eſſe incrementum vel decrementum celeritatis tempore *mplo* $T = tm$ genitum pariter *mplum* incrementi vel decrementi quocunque ſimplo tempuſculo t producti (274. §.), quod, ſi is motus a vi variabili pendeat, erit impoſſibile. Pars vero altera poteſt hoc modo evinci.

1. Vis invariabilis punctum P ad motum continuo ſollicitans producet quibuslibet duobus temporibus t, T ab illo momento, quo ea agere incipit, computatis, incrementa vel decrementa celeritatis g, G ipſis temporibus directe proportionalia; adeoque erit motus puncti P ab illa dependens uniformiter acceleratus vel retardatus (274. §.). Erunt enim tempora t, T commenſurabilia vel incommenſurabilia (5. §.). Primo caſu extabit aliquis numerus integer m, vel fractus $\frac{m}{n}$, pro quo ſit $T = tm$ vel $T = t\frac{m}{n}$ (6. §.): igitur etiam $G = gm$ vel $G = g\frac{m}{n}$ (304. 305. §.); proinde ſemper $G:g = T:t$.

2. Quodſi autem tempora T, t ſint incommenſurabilia; extabit, ſumto quantumcunque magno numero integro n, alter numerus integer m, pro quo fiet per (12. §.)

$$T > t\frac{m}{n} \quad \text{et ſimul} \quad T < t\frac{m+1}{n}.$$

3. Eadem vis producat tempore $= t\frac{m}{n}$ incrementum vel decrementum celeritatis e, et tempore $= t\frac{m+1}{n}$ incrementum vel decrementum E: cum temporibus T, t producantur, per hypotheſim, incrementa vel decrementa G, g; erit

$$E = g\frac{m+1}{n}, \quad e = g\frac{m}{n} \quad \text{per (305. §.);}$$

$$G > e, \quad G < E \quad \text{ob (2) per (303. §.);}$$

$$\text{igitur } G > g\frac{m}{n} \quad \text{et ſimul} \quad G < g\frac{m+1}{n}.$$

4. Ob (2) (3) erit itaque etiam nunc $G:g = T:t$ per (22. §.).

308. Theorema.

Si punctum P a numero m viribus aequalibus et invariabilibus ſecundum datam directionem ad motum eodem momento determinetur, et tempore T continuo ſollicitetur; acquiret punctum P intra tempus T celeritatem mplam celeritatis, quam quaevis illarum virium, abſentibus reliquis, ſeorſim eodem tempore generaret.

Demon-

Demonſtratio.

Cum vis invariabilis punctum P ad motum continuo ſollicitans eadem prorſus efficacia quovis momento agat, ſeu quieſcat punctum P, ſeu moveatur, aut ob ſuam inertiam (292. 293. §.), aut ob actionem cujuscunque alterius vis actu in illud exertam; ipſum vero punctum P omnem celeritatem, ad quam id a certa vi determinatur, et recipere cogatur, et perpetuo conſervare (293. §.): clarum eſt, quod, ſi punctum P a numero m viribus aequalibus et invariabilibus ad motum ſecundum determinatam directionem tempore T continuo ſollicitetur, ſingulae vires easdem celeritates aequales tempore T debeant generare, quas eae ſeorſim in totidem puncta agentes producerent (300. §.); adeoque punctum P intra tempus T debeat acquirere celeritatem m*plam* celeritatis, quam una ejusmodi vis, abſentibus omnibus reliquis viribus, eodem tempore produceret.

309. Corollarium 1.

Perſpicuum eſt, punctum P eadem prorſus efficacia quovis momento ad motum ſecundum determinatam directionem ſollicitatum iri, ſeu illud a numero m viribus aequalibus et invariabilibus v, v, v, - -. - v, ſeu ab unica vi U=vm m*pla* vis v, ad motum et determinetur et continuo urgeatur (294. §.): vis m*pla* U=vm producet ergo quovis tempore T celeritatem G=gm m*plam* celeritatis g, quam vis ſimpla g intra idem tempus poteſt generare (308. §.).

310. Corollarium 2.

Vis ergo invariabilis $X = x\frac{r}{n}$ r*pla* unius n*tae* partis vis x, datum punctum P ad motum determinans et continuo ſollicitans, producet quovis tempore T celeritatem $K = k\frac{r}{n}$ r*plam* unius n*tae* partis celeritatis k, quam vis x intra idem tempus generaret. Si enim vis $= x\frac{1}{n}$ tempore T generet celeritatem z; erit k=zn et K=zr (309. §.): igitur $z = k\frac{1}{n}$ et $K = k\frac{r}{n}$.

311. Theorema.

Celeritates G, g, *quas duae vires invariabiles* V, v, *puncta* P, p, *ad motum eodem momento determinantes, et continuo ſollicitantes, intra idem*

tempus T *ab initio motus computatum produxerint, erunt inter ſe in ratione directa earundem virium, ſeu erit* $C:c=V:v$.

Demonſtratio.

1. Si vires V, v ſint commenſurabiles (3. §.); dabitur certus numerus integer m vel fractus $\frac{m}{n}$, pro quo debebit eſſe $V=vm$ vel $V=v\frac{m}{n}$ (6. §.): igitur etiam $C=cm$ vel $C=c\frac{m}{n}$ (309. 310. §.); adeoque utroque caſu $C:c=V:v$.

2. Sint jam vires V, v incommenſurabiles; neceſſe eſt, ut accepto quantumvis magno numero integro n alter numerus integer m ſit poſſibilis, pro quo per (12. §.) fiat

$$V > v\frac{m}{n} \text{ et ſimul } V < v\frac{m+1}{n}.$$

3. Vis invariabilis $=v\frac{m}{n}$ producat tempore T celeritatem x, et vis $=v\frac{m+1}{n}$ celeritatem X: cum, per hypotheſim, vires V, v eodem tempore celeritates C, c producant; erit

$$x=c\frac{m}{n},\ X=c\frac{m+1}{n} \text{ per (310. §.);}$$

$$C > x,\ C < X \text{ ob (2) per (301. §.):}$$

$$\text{igitur } C > c\frac{m}{n} \text{ et ſimul } C < c\frac{m+1}{n}.$$

4. Quamobrem, ob (2) (3) per (22. §.); debet etiam nunc eſſe $C:c=V:v$.

312. Corollarium.

Motus punctorum P, p a viribus invariabilibus V, v ad illum et determinatorum, et continuo ſollicitatorum debet eſſe uniformiter acceleratus purus (307. 274. §.): ſpatia ergo S, s, quae puncta P, p intra idem tempus T percurrerint, erunt in ratione directa virium V, v. Si enim tempore T generentur celeritates C, c, debebit eſſe

$$S=\tfrac{1}{2}CT;\ s=\tfrac{1}{2}cT; \text{ per (279. §.):}$$

$$\text{igitur } S:s=C:c=V:v \text{ per (311. §.).}$$

DISSER-

DISSERTATIO IX.

DE DETERMINATIONE MOTUS PROGRESSIVI DATARUM MASSARUM PER DATAS VIRES.

313. Definitio.

Motus progreſſivus dati corporis, vel cujuscunque ſyſtematis plurium corporum aut punctorum, vocatur is determinatus motus, quo ſingula puncta corporis vel ſyſtematis ſecundum directiones inter ſe parallelas et celeritatibus quovis momento aequalibus promoventur.

314. Corollarium 1.

Omne corpus determinatae figurae exhibet unum ſyſtema plurium punctorum, quibus minimae particulae materiales, in quas illud eſt reſolubile, poſſunt ſubſtitui (118. §.): quaecunque ergo de motu progreſſivo ſyſtematis plurium punctorum in genere fuerint dicta, ea etiam ad motum progreſſivum corporum pertinebunt (313. §.).

315. Corollarium 2.

Spatia, quae a ſingulis punctis dati ſyſtematis plurium punctorum motu progreſſivo incedentis intra eadem tempuscula percurruntur, debent eſſe inter ſe aequalia; et viciſſim motus dati ſyſtematis erit progreſſivus, ſi ſingula ejus puncta ſecundum directiones parallelas moveantur, et quovis cogitabili tempusculo ſpatia aequalia conficiant (315. 257. §.).

316. Corollarium 3.

Determinato motu unici puncti cujuscunque ſyſtematis plurium punctorum motu progreſſivo incedentis, noſcetur eo ipſo motus totius ſyſtematis: ſingula enim ejus puncta eandem quovis momento celeritatem conſtantem aut variabilem habebunt, atque hanc ipſam celeritatem totum ſyſtema eodem momento habere cenſebitur; ſingula porro puncta per idem quovis tempusculo ſpatium promovebuntur, quod pro ſpatio a toto ſyſtemate intra idem tempusculum confecto habebitur (313. 315. §.).

317. Corollarium 4.

Quocunque motu progreſſivo feratur datum ſyſtema plurium punctorum, eaedem manebunt diſtantiae mutuae duorum quorumvis punctorum ejusdem ſyſtematis, rectaque inter quaeque duo puncta intercepta perpetuo ſibi manebit parallela (313. 315. §.).

318. Corollarium 5.

Si ſingula puncta alicujus ſyſtematis ſecundum directiones inter ſe parallelas in eandem plagam tendentes ab ejusmodi viribus ad motum continuo ſollicitentur, quae ſint invariabiles et inter ſe aequales, vel variabiles quovis tamen momento inter ſe aequales; erit motus totius ſyſtematis progreſſivus, modo ſingula puncta eo momento, quo illa a datis viribus urgeri incipiunt, vel omni celeritate deſtituta quieſcant, vel omnia ſecundum directiones datarum virium, aut directiones illis oppoſitas pari celeritate γ ad motum jam ſint determinata (313. 300. 302. §).

319. Corollarium 6.

Eo determinato caſu, quo ſingula puncta dati alicujus ſyſtematis, quieſcentia vel ad motum ſecundum directiones inter ſe parallelas celeritate γ jam determinata, a totidem viribus quovis momento inter ſe aequalibus ſecundum easdem celeritatis γ, vel oppoſitas, directiones ad motum continuo ſollicitata fuerint, conſtiteritque, motum progreſſivum indidem pendentem (318 §.) uniformiter accelerari vel retardari; debebunt illae vires eſſe invariabiles (313. 307. §.).

320. Corollarium 7.

Et viciſſim, ſi ſingula puncta dati ſyſtematis, quieſcentia vel ad motum celeritate γ ſecundum directiones inter ſe parallelas jam determinata, a totidem viribus aequalibus et invariabilibus ſecundum easdem celeritatis γ, vel oppoſitas, directiones ad motum continuo ſollicitentur; debebit motus progreſſivus totius ſyſtematis indidem pendens (318. §.) uniformiter accelerari vel retardari (313. 307. §.).

321. Corollarium 8.

Minimas omnium corporum gravium particulas in quavis altitudine ab aequalibus viribus ſecundum directiones inter ſe ad ſenſum parallelas deorſum ſollicitari, ideo in (41. §.) ſuppoſuimus, quia id cum omnibus obſervationibus

tionibus experimentisque peculiari diligentia inſtitutis quam optime conſentit: cum ergo ob ſimiles rationes motus corporum gravium libere labentium pro uniformiter accelerato poſſit haberi; licebit motum cujuslibet corporis gravis libere ex quacunque altitudine labentis inſtar motus progreſſivi (318. §.) uniformiter accelerati ſpectare, qui a viribus gravitatis aequalibus et invariabilibus minimas ejus particulas ſecundum directiones inter ſe parallelas deorſum ad motum continuo urgentibus dependeat (319. §.).

322. Corollarium 9.

Quapropter, ubi motus corporum gravium libere labentium determinari debuerit, licebit illa inſtar totidem punctorum ſecundum directiones verticales inter ſe parallelas motu uniformiter accelerato deſcendentium conſiderare, quae a viribus aequalibus et invariabilibus ſecundum easdem directiones deorſum ad motum continuo urgeantur, ideoque quovis tempore ab initio lapſus computato et per aequales altitudines decidant, et aequales celeritates acquirant (321. 316. 311. 312. §.).

Scholion.

Verum haec omnia de lapſu libero corporum gravium in ſpatio ab omni aere vacuo debent intelligi. Aer enim reſiſtit deſcenſui corporum gravium, evertitque principia, quibus univerſa doctrina de libero ipſorum lapſu ſolet ſuperſtrui. Sic e. gr. duo corpuscula, quae in libero aere diverſis temporibus ab initio lapſus computatis per aequales altitudines decidunt, contra (322. §.), in ſpatio ab aere vacuo aequales altitudines eodem tempore, teſte experientia, conficiunt. Quaecunque ergo in ſequentibus de lapſu corporum gravium fuerint demonſtrata, ad deſcenſum ipſorum in ſpatio ab aere vacuo debebunt reſtringi.

323. Hypotheſis.

Sumto pede Rhenano pro menſura altitudinum, per quas corpora gravia libere labentia deſcendant; exprimet $g = 15\frac{5}{8} = 15,625$ *ped. altitudinem, per quam quodlibet corpus grave de quiete libere labens primo minuto ſecundo ſui lapſus decidet* (322. §.).

Scholion.

Qua optima ratione altitudinem hanc inveſtigare licuit, inferius in diſſertatione de pendulis videbimus. Interea notent ſibi tyrones, numerum 15625 aequari perfecto quadrato numeri 125, adeoque radicem ejus quadraticam

draticam eſſe hunc ipſum numerum, unde non parum commodi in calculos redundabit.

324. Corollarium 1.

Quia motus corporum gravium de quiete libere labentium eſt uniformiter acceleratus purus (322. 274. §.); neceſſe eſt, ut omne corpus grave de quiete libere labens tantam celeritatem k in fine primi minuti ſecundi ſui lapſus habeat, quanta id motu aequabili per duplam altitudinem $2g$ decideret (323. 280. §.): omne corpus grave de quiete libere labens acquiret ergo intra primum minutum ſecundum ſui lapſus celeritatem $k = 2g = 31\frac{1}{4} = 31, 25$ ped. rhen. per (323. 271. §.).

325. Corollarium 2.

Ob (322. 275. 281. 282. §.) erunt celeritates C, c, quas corpus grave de quiete libere labens intra duo quaecunque tempora T, t ab initio lapſus computata acquiſiverit, inter ſe in ratione directa temporum; altitudines vero A, a, per quas illud temporibus T, t deſcenderit, erunt inter ſe ut quadrata temporum T, t, et ut quadrata celeritatum C, c. Dato vero tempore T in minutis ſecundis (262. 263. §.), quo motus corporis gravis de quiete libere labentis duret, poterit ob (324. 322. §.) per (278. 276. §.) tam altitudo A lapſus intra tempus T, quam celeritas eodem lapſu genita, ut ſequitur, perfecte determinari.

$$A = gT^2;\quad C = 2gT.$$

E. gr. Ponamus globulum plumbeum tempore $T = 5$ minutis ſecundis de quiete libere labi; deſcendet is hoc tempore per altitudinem

$$S = gT^2 = 15,625 . 25 = 390,625 \text{ ped.}$$

Celeritas vero, quam is eodem tempore acquiret, debebit eſſe

$$C = 2gT = 31,25 . 5 = 156,25 \text{ ped.}$$

adeoque tanta, quanta is motu aequabili progrediens quovis minuto ſecundo ſpatium 156,25 pedum rhenanorum deberet conficere (271. §.).

326. Corollarium 3.

Cognita vero altitudine A, per quam corpus grave certo tempore T de quiete libere labens decidat, vel celeritate C, quam illud intra idem tempus acquirat; poterit inveniri ipſum tempus T in minutis ſecundis per (325. §.), nimirum

$$T = \sqrt{\frac{A}{g}};\qquad T = \frac{C}{2g}.$$

327. Corollarium 4.

Cum debeat eſſe $g = \frac{A}{T^2}$ (325. §.), patet, qua methodo altitudinem g (323. §.) inveſtigare liceret, ſi tempus T liberi lapſus alicujus corporis gravis per notam quampiam altitudinem A in minutis ſecundis poſſet determinari. Aſt, quia deſcenſus iſte in vacuo deberet fieri (322. §. Schol.), in vacuo autem ſpatio, quale e. gr. in vitreo recipiente ope antliae pnevmaticae obtinetur, tanta altitudo A, quanta ad accuratam temporis T obſervationem eſſet neceſſaria, non poteſt haberi; manifeſtum eſt, hanc methodum ad inveſtigationem altitudinis g non eſſe idoneam.

328. Corollarium 5.

Si $T = \frac{C}{2g}$ ſubſtituas in $A = gT^2$ (325. §.); obtinebis binas ſequentes formulas, quarum una dat altitudinem A, per quam corpus grave de quiete libere deſcendens debet labi, ut datam aliquam celeritatem C acquirat; altera vero celeritatem dat, quam corpus ejusmodi libero lapſu per determinatam altitudinem A deberet acquirere.

$$A = \frac{C^2}{4g}; \quad C = 2\sqrt{gA}.$$

329. Corollarium 6.

Data igitur quacunque celeritate C ſemper poterit aſſignari altitudo A, per quam corpus grave de quiete libere labens eandem acquirat celeritatem (328. §.): altitudo ejusmodi A vocatur *altitudo debita celeritati* C, eſtque ſemper $A = \frac{C^2}{4g}$, et $C = 2\sqrt{gA}$ ipſa celeritas *debita altitudini* A.

E. gr. Celeritatem conſtantem C puncti P motu aequabili incedentis (258. §.), aut celeritatem C puncti P motu quocunque inaequabili progredientis acquiſitam tempore determinato (271. §.), aequari celeritati, quae altitudini A 1000 pedum rhenanorum ſit debita, tantundem ſignificabit, ac celeritatem C puncti P illi derterminatae celeritati eſſe aequalem, quam corpus grave per altitudinem 1000 pedum deſcendens acquireret, ita ut illa ſit

$$C = 2\sqrt{g \cdot 1000} = 2\sqrt{15{,}625 \cdot 1000} = 250 \text{ ped.}$$

330. Corollarium 7.

Si corpus grave de quiete libere labens moveatur quotcunque tempusculis aequalibus t, t, t, - - - t ab initio lapſus ordine naturali ſibi ſuccedentibus; debebit illud quolibet m*to* tempuſculo t ob (322. 324. 283. §.) percurrere altitudinem $= g(2m-1)t^2$.

Quovis igitur m*to* minuto ſecundo deſcendet id per altitudinem $= g(2m-1)$.

Quamobrem ſpatia ſingulis minutis ſecundis ab initio lapſus ordine naturali ſibi ſuccedentibus percurſa conſtituent ſeriem

$$g,\ 3g,\ 5g,\ 7g,\ 9g,\ 11g,\ \text{etc.}$$

331. Theorema.

Fig. 61. *Si corpus* PQR (61. Fig.) *vel quieſcens, vel ad motum progreſſivum ſecundum directionem* gG *per ejus centrum gravitatis* g *transeuntem, aut directionem* gv *ei oppoſitam, celeritate γ jam determinatum, vis quaecunque* V *ſecundum directionem* gG *ad motum ſollicitare incipiat, et tempore* T *continuo ſollicitet; erit nunc quoque motus totius corporis progreſſivus, per vim* V *ita determinatus, ac ſi, illa abſente, ſingulae minimae particulae ejusdem corporis a viribus aequalibus, quarum quaevis ſit* $= V\frac{m}{M}$, *ſecundum directiones directioni* gG *parallelas ad motum continuo impellerentur, exiſtente maſſa totius corporis* $= M$, *et maſſula cujusvis minimae ejus particulae* $= m$.

Demonſtratio.

Si quovis momento, quo centrum gravitatis g corporis PQR a vi V ſecundum directionem gG ad motum ſollicitatur, in minimas quasque ejus particulas, ut a, b, c, d, etc. cogitentur agere totidem vires aequales $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, etc., quarum quaevis ſit $= V\frac{m}{M}$, ſecundum directiones oppoſitas $a\alpha, b\beta, c\gamma, d\delta$, etc. parallelas directioni gG; erit centrum gravitatis g corporis PQR idem cum centro aequilibrii omnium virium $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, etc. (152. §.), ſummaque harum virium aequabitur vi V, ſicut ſumma maſſularum m, m, m, m, etc. minimarum particularum a, b, c, d, etc., in quas illae agunt, aequatur maſſae M totius corporis; conſequenter erunt omnes vires $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, etc. cum vi V in aequilibrio (128. §.): perſpicuum eſt ergo, vim V minimas particulas a, b, c, d, etc. corporis PQR eadem

prorſus

prorſus efficacia ad motum ſecundum directiones aA, bB, cC, dD, etc. directioni gG parallelas quovis momento ſollicitaturam, qua illae, abſente vi V, eodem momento a viribus aequalibus A, B, C, D, etc., quarum quaelibet ſit $= V \frac{m}{M}$, ſollicitarentur, ſi hae in illas immediate agerent, unde neceſſario ſequitur, quod erat demonſtrandum (300. 302. 313. §.).

332. Corollarium 1.

Cum datum corpus PQR, vel quieſcens, vel celeritate γ ad motum progreſſivum ſecundum directionem gG per ejus centrum gravitatis g tranſeuntem, aut directionem gv illi oppoſitam jam determinatum, a vi quacunque V ad motum ſecundum directionem gG continuo ſollicitatum fuerit; motus progreſſivus totius corporis perfecte determinabitur, ſi unica ejus particula, quam ob parvitatem inſtar puncti conſiderare liceat, a vi $= V \frac{m}{M}$ per maſſulam m ejusdem particulae, maſſam M totius corporis, et ipſam vim V determinata, ad motum ſecundum directionem directioni gG parallelam continuo ſollicitari, eoque momento, quo vis $V \frac{m}{M}$ in illam incipit agere, vel quieſcere, vel celeritate γ ad motum ſecundum eandem, vel oppoſitam directionem aliunde determinata eſſe ſupponatur, tum quaeratur et ſpatium, quod illa intra datum tempus T debeat percurrere, et celeritas, quam intra idem tempus debeat acquirere (331. 316. §.).

333. Corollarium 2.

Vis invariabilis V, datum corpus PQR ad motum ſecundum directionem gG per ejus centrum gravitatis g tranſeuntem tempore T continuo impellens, producet motum uniformiter acceleratum vel uniformiter retardatum, ſi corpus PQR initio temporis T quieſcat, aut ad motum progreſſivum celeritate γ ſecundum directionem gG vel directionem oppoſitam gv jam ſit determinatum (332. 307. §.).

334. Corollarium 3.

Et viciſſim, ſi vis V, datum corpus PQR ad motum ſecundum directionem gG per illius centrum gravitatis tranſeuntem tempore T continuo ſollicitans, producat motum uniformiter acceleratum vel retardatum, prout corpus PQR initio temporis T quieſcit, aut ad motum progreſſivum

3. Denotante ergo P pondus corporis Z; habebimus per (2) ſequentes proportiones:

$$S : gT^2 = V : P \quad \text{et} \quad C : 2gT = V : P.$$

Cum porro omnis vis V uni ponderi aequetur (295. §.); erunt V, P quanta homogenea, pro quorum communi menſura (14. §.) certum ponduſculum p debebit accipi, eritque

$$S : gT^2 = \frac{V}{p} : \frac{P}{p} \quad \text{et} \quad C : 2gT = \frac{V}{p} : \frac{P}{p}.$$

4. Pro menſura maſſae M corporis Z ſumi debet in hac hypotheſi maſſula m, cujus pondus aequetur ponduſculo p pro menſura ponderum V, P ſumto, quo fiat $\frac{M}{m} = \frac{P}{p}$ (52. §.): igitur erit etiam

$$S : gT^2 = \frac{V}{p} : \frac{M}{m} \quad \text{et} \quad C : 2gT \; \frac{V}{p} : \frac{M}{m}.$$

Quamobrem, quia $\frac{V}{p}$, $\frac{M}{m}$ ſunt exponentes rationum geometricarum vis V ad illius menſuram p, et maſſae M ad ejusdem menſuram m, ſi deinceps literae V, M eosdem exponentes exprimant, ſicut ſimiles numeri per S, C, T debent intelligi (263. §.); habebimus

$$S : gT^2 = V : M \quad \text{et} \quad C : 2gT = V : M;$$

$$\text{hinc } S = g\frac{V}{M}T^2; \; C = 2g\frac{V}{M}T.$$

339. Corollarium 1.

Cognita igitur altitudine g (323. §.), per quam quodvis corpus grave de quiete libere labens primo minuto ſecundo ſui lapſus debet decidere, facile per (338. §.) determinabitur tam ſpatium S, quod datum corpus, a data vi V invariabili ſecundum directionem per ejus centrum gravitatis tranſeuntem de quiete ad motum determinatum et continuo ſollicitatum, dato quocunque tempore T percurret, quam celeritas C, quam illud eodem tempore acquiret.

340. Corollarium 2.

Ex (338. §.) fluunt binae ſequentes formulae, quarum prior dabit ſpatium, quod corpus datae maſſae M, a data vi invariabili V ad motum ſecun-

ſecundum directionem per ejus centrum gravitatis tranſeuntem continuo ſollicitatum, debet conficere, ut id datam celeritatem C acquirat; altera vero dabit ipſam celeritatem C, quam illud eo tempore, quo datum ſpatium S percurritur, debet acquirere.

$$S = \frac{MC^2}{4gV}; \quad C = 2\sqrt{\frac{gVS}{M}}.$$

341. Corollarium 3.

Quodſi autem quaeratur tempus T, quo corpus datae maſſae M, a data vi invariabili V ad motum ſecundum directionem per ejus centrum gravitatis tranſeuntem continuo debet ſollicitari, ut illud datum ſpatium S percurrat, vel determinatam celeritatem C acquirat; erit per (338. §.)

$$T = \sqrt{\frac{MS}{gV}}; \quad T = \frac{MC}{2gV}.$$

342. Corollarium 4.

Quoties datum corpus motu progreſſivo ita debuerit incedere, ut illud quovis dato tempore T determinatum ſpatium S conficiat, determinatamque celeritatem C acquirat; toties poterit determinari vis una invariabilis V, a qua datum corpus eo fine ſecundum directionem per illius centrum gravitatis tranſeuntem ad motum continuo debebit ſollicitari: erit enim per (338. 340. §.)

$$V = \frac{MS}{gT^2}; \quad V = \frac{MC}{2gT}; \quad V = \frac{MC^2}{4gS}.$$

343. Problema.

Data vi invariabili V, quae corpus Z maſſae M, ad motum progreſſivum celeritate γ ſecundum directionem per illius centrum gravitatis tranſeuntem aliunde determinatum, ad motum ſecundum eandem vel oppoſitam directionem tempore T continuo ſollicitet: invenire tam ſpatium S, quod a corpore Z intra tempus T debebit confici, quam celeritatem C, quam illud in fine temporis T debebit habere.

Solutio.

1. Ob (332. 333. §.) quaerendum eſt ſpatium S, quod quaevis minima corporis Z particula, ob vim invariabilem $= V \frac{m}{M}$ illam ad motum

continuo

continuo ſollicitantem motu uniformiter accelerato vel retardato celeritateque γ inchoato progrediens, intra tempus T percurreret, una cum celeritate C, quam illa in fine temporis T deberet habere.

2. Si corpus Z a vi invariabili V de quiete ad motum determinaretur, continuoque tempore T ſollicitaretur; deberet quaevis minima ejus particula motu uniformiter accelerato puro incedens (333. 338. 316. §.) ſpatium $= g \frac{V}{M} T^2$ conficere, et celeritatem $= 2g \frac{V}{M} T$ acquirere.

3. Abſente vero omni vi V percurreret quaevis particula corporis Z motu aequabili celeritate initiali γ ſpatium $= \gamma T$ intra tempus T (316. 265. §.).

4. Quare, ſi directio vis V corpus Z ad motum continuo ſollicitantis, eadem ſit cum directione celeritatis initialis γ, quo caſu motus progreſſivus corporis Z debet uniformiter accelerari (333. §.); percurret ob (1) corpus Z tempore T ſequens ſpatium S per (285. §.) ſummae ſpatiorum (2) (3) aequale, et habebit in fine ejusdem temporis ſequentem celeritatem C per (302. §.) aequalem ſummae celeritatis initialis γ, celeritatisque (2).

$$S = \gamma T + g \frac{V}{M} T^2; \quad C = \gamma + 2g \frac{V}{M} T.$$

5. Si autem directio vis invariabilis V corpus Z ad motum continuo ſollicitantis oppoſita ſit directioni celeritatis γ, adeoque motus progreſſivus corporis Z uniformiter retardetur (333. §.); debebit ob (1) corpus Z tempore T percurrere ſequens ſpatium S per (286. §.) aequale differentiae ſpatiorum (2) (3), et ſequentem celeritatem C in fine temporis T habere, utpote aequalem differentiae celeritatis initialis γ, celeritatisque (2) per (302. §.).

$$S = \gamma T - g \frac{V}{M} T^2; \qquad C = \gamma - 2g \frac{V}{M} T.$$

344. Corollarium 1.

Cum pro $T < \frac{M\gamma}{2gV}$ valor celeritatis C ſit poſitivus, pro $T = \frac{M\gamma}{2gV}$ vero fiat celeritas $C = 0$, et pro $T > \frac{M\gamma}{2gV}$ induat C valorem negativum (343. §.); perſpicuum eſt, motum corporis Z ſecundum directionem celerita-

celeritatis initialis γ uniformiter retardatum iri, quamdiu fuerit tempus, quo is duret, $T < \frac{M\gamma}{2gV}$; durabit porro hic motus retardatus tempore $T = \frac{M\gamma}{2gV}$, intra quod corpus Z percurret ſpatium $S = \frac{M\gamma^2}{4gV}$ (343. §.); creſcente vero tempore ultra $T = \frac{M\gamma}{2gV}$ progredietur corpus Z ob ſolam vim V ſecundum directionem hujus vis oppoſitam directioni celeritatis initialis γ motu jam uniformiter accelerato (333. §.).

345. Corollarium 2.

Si corpori gravi Z imprimatur determinata celeritas γ ſecundum directionem verticalem verſus terrae ſuperficiem, cum hoc caſu vis V, ipſum ad motum ſecundum eandem directionem deorſum continuo ſollicitatura debeat aequari ponderi ejusdem corporis; erit $V = M$ (338. §. 4. n.): altitudo ergo A, per quam corpus grave Z hoc caſu intra datum tempus T labetur, et celeritas C, quam in fine ejusdem temporis habebit, erit per (343. §.)

$$A = \gamma T + gT^2; \quad C = \gamma + 2gT.$$

346. Corollarium 3.

Si vero corpori gravi Z imprimatur determinata celeritas γ ſecundum directionem verticalem oppoſitam directioni gravitatis (42. §.); erit nunc quoque $V = M$ (345. §.), corpusque Z aſcendet quovis tempore T per altitudinem $A = \gamma T - gT^2$, et habebit in fine ejusdem temporis T celeritatem $C = \gamma - 2gT$ (343. §.), quae pro $T = \frac{\gamma}{2g}$ fiet aequalis nihilo, quo ipſo per $T = \frac{\gamma}{2g}$ determinatur totum tempus aſcenſus per altitudinem $A = \frac{\gamma^2}{4g}$: per hanc ergo altitudinem aſcendet corpus Z motu uniformiter retardato (274. §.), tum labetur deorſum ob ſolam vim gravitatis motu uniformiter accelerato puro (321. 274. §.).

347. Problema.

Data maſſa M corporis Q, quod a data vi variabili ſecundum directionem per ejus centrum gravitatis tranſeuntem ad motum continuo urgeatur, eoque momento, quo eadem vis in illud agere incipit, quieſcat, aut ad motum progreſſivum determinata celeritate ſecundum directionem vis impellentis, vel directionem ei oppoſitam jam ſit determinatum; inveſtigare celeritatem, quam corpus Q intra datum quodcunque tempus debebit acquirere.

 Solu-

Solutio.

1. Quidquid ſit vis variabilis corpus Q ad motum continuo ſollicitans; producet ea motum progreſſivum vel acceleratum, vel retardatum (331. 332. 302. 268. §.): quodſi ergo ab eo momento, quo illa in corpus Q agere incipiat, effluat tempus T, et celeritas corporis Q in fine hujus temporis ſit C; neceſſe eſt, ut, ſi tempus T creſcat quocunque tempusculo ΔT, celeritas C intra hoc tempusculum vel certum incrementum ΔC capiat, vel decrementum aliquod ΔC patiatur.

2. Quacunque porro lege vis variabilis corpus Q impellens ad motum durante motu mutetur, quomodocunque ea ergo tempore T creſcat vel decreſcat, ſupponatur illa eſſe $= V$ in fine temporis T, creſcenteque tempore T tempusculo ΔT, hoc ipſo tempusculo incrementum aliquod ΔV capere, vel decrementum ΔV pati: quare erit V vis, quae initio tempusculi ΔT aget in corpus Q; ea deinde toto hoc tempusculo creſcet vel decreſcet, eritque $= V + \Delta V$ vel $= V - \Delta V$ in fine ejusdem tempusculi.

3. Si corpus Q toto tempusculo ΔT a vi invariabili V vel $V + \Delta V$ aut $V - \Delta V$ ad motum continuo ſollicitaretur; incrementum vel decrementum celeritatis, quod illa hoc tempusculo produceret, eſſet aequale celeritati, quam eadem vis corpus Q de quiete ad motum determinans et tempusculo ΔT continuo ſollicitans intra hoc tempusculum generaret (332. 303. §.): idem ergo incrementum vel decrementum eſſet per (338. §.) $2g\frac{V}{M}\Delta T$, vel $2g\frac{V+\Delta V}{M}\Delta T$, aut $2g\frac{V-\Delta V}{M}\Delta T$.

4. Quodſi jam vis corpus Q tempusculo ΔT ad motum continuo impellens continuo creſcat; erit illa quovis momento durante motu tempusculo ΔT major quam V et minor quam $V + \Delta V$ per (2): incrementum ergo vel decrementum celeritatis ΔC, quod illa tempusculo ΔT producit (1), debet eſſe majus incremento vel decremento, quod vis invariabilis $= V$, et ſimul minus incremento vel decremento, quod vis invariabilis $= V + \Delta V$ eodem tempusculo produceret. Quamobrem habebimus hoc caſu per (3)

$$\Delta C > \frac{2gV}{M}\Delta T \text{ et ſimul } \Delta C < \frac{2g(V+\Delta V)}{M}\Delta T.$$

5. Si

5. Si autem vis corpus Q tempuſculo ΔT continuo urgens continuo decreſcat; debebit illa quovis momento durante motu tempuſculo ΔT minor eſſe quam V, et major quàm $V - \Delta V$ per (2): incrementum itaque vel decrementum celeritatis ΔC, quod illa intra tempuſculum ΔT generat, erit minus incremento vel decremento, quod vis invariabilis $= V$, et majus incremento vel decremento, quod vis invariabilis $= V - \Delta V$ eodem tempuſculo produceret. Quare ob (3) habebimus

$$\Delta C < \frac{2gV}{M} \Delta T \text{ et ſimul } \Delta C > \frac{2g(V - \Delta V)}{M} \Delta T.$$

6. Leges, quibus vires variabiles poſſunt creſcere durante motu et decreſcere, ſunt numero infinitae poſſibiles (294. §.): eſt autem impoſſibile motum corporis Q ab ejusmodi vi pendentem perfecte determinare, niſi noſcatur lex, qua illa durante motu mutatur. Cogimur ergo ſupponere, legem, qua vis variabilis V corpus Q ad motum continuo impellens, creſcit vel decreſcit creſcente tempore T, quo motus ab illa dependens durat, eoque ipſo etiam functionem temporis T eidem vi aequalem eſſe aſſignabilem, quo pro certis coefficientibus l, m, n, etc. independentibus a tempuſculo ΔT differentia ΔV certae ſeriei $l\Delta T + m\Delta T^2 + n\Delta T^3 +$ etc. aequetur (Vol. I. §. 84.).

7. Hinc (4), (5) (6) fiet pro quovis cogitabili quantumlibet parvo tempuſculo ΔT

$$\frac{\Delta C}{\Delta T} > \frac{2gV}{M} \text{ et ſimul } \frac{\Delta C}{\Delta T} < \frac{2gV}{M} + \frac{2g}{M}(l\Delta T + m\Delta T^2 + \text{etc.});$$

vel

$$\frac{\Delta C}{\Delta T} < \frac{2gV}{M} \text{ et ſimul } \frac{\Delta C}{\Delta T} > \frac{2gV}{M} - \frac{2g}{M}(l\Delta T + m\Delta T^2 + \text{etc.});$$

8. Ex his denique expreſſionibus obtinebimus per (Vol. I. §. 131.) ſequentem expreſſionem exponentis rationis differentialis celeritatis C conſideratae inſtar unius functionis temporis variabilis T, qui, ſi creſcente tempore decreſcat celeritas, cum ſignis contrariis ſumetur (Vol. I. §. 132.)

$$\varepsilon C = \frac{2g}{M} V \varepsilon T.$$

9. Ab hujus exponentis differentialis integratione dependebit jam inventio celeritatis C debitae tempori T, quam facile perficies, ſi antea

vim V per certam functionem vel temporis T, vel ipſius celeritatis C exprimas: utroque enim caſu obtinebitur in (8) aequatio differentialis intra binas tantum variabiles, nimirum C et T. Ut vero pars conſtans quaeſiti integralis per (Vol. I. §. 238.) rite determinetur, attendendum eſt ad initium motus datae maſſae: ubi enim iſta de quiete ad motum a data vi fuerit determinata; debebit eſſe C = o pro T = o: ſi vero ea eo momento, quo a data vi urgeri incipit, aliunde ſit ad motum celeritate γ determinata; erit C = γ pro T = o.

348. Problema.

Data functione exprimente celeritatem C, *quam corpus motu progreſſivo inaequabili incedens intra determinatum tempus* T *acquirat; invenire ſpatium* S, *quod illud hoc tempore conficiet.*

Solutio.

1. Si tempus T, quo motus duret, creſcat quocunque tempuſculo ΔT; debebit etiam ſpatium S eo tempore percurſum creſcere aliquo ſpatiolo ΔS.

2. Celeritas vero C debita tempori T capiet tempuſculo ΔT incrementum aliquod ΔC vel patietur decrementum ΔC, quo fiat, ut celeritas corporis initio tempuſculi ΔT ſit C, eaque toto tempuſculo ΔC creſcens vel decreſcens in fine ejusdem tempuſculi in $C + \Delta C$ vel $C - \Delta C$ abeat.

3. Quare, ſi datum corpus incedat celeritate continuo creſcente; erit ſpatiolum ΔS, quod illud tempuſculo ΔT conficit (1), majus ſpatiolo $C \Delta T$, quod celeritate invariabili $= C$, et ſimul minus ſpatiolo $(C + \Delta C)\Delta T$, quod celeritate invariabili $= C + \Delta C$ tempuſculo ΔT percurreretur (265. §.), per (2) ob (257. §.), id eſt: erit ſemper

$$\Delta S > C \Delta T \text{ et ſimul } \Delta S < (C + \Delta C)\Delta T.$$

4. Si autem datum corpus progrediatur celeritate continuo decreſcente; neceſſe eſt, ut ſpatiolum ΔS, quod illud tempuſculo ΔT percurrit (1), ſit minus ſpatiolo $C \Delta T$, quod celeritate invariabili C, et majus ſpatiolo $(C - \Delta C)\Delta T$, quod celeritate invariabili $= C - \Delta C$ intra tempuſculum ΔT conficeretur (265. §.), ob (2) per (257. §.), id eſt: erit ſemper

$$\Delta S < C \Delta T \text{ et ſimul } \Delta S > (C - \Delta C)\Delta T.$$

5. Sed,

5. Sed, quia celeritas C aequatur certae functioni ipſius temporis T, dari debent coefficientes l, m, n, etc. independentes a ΔT, pro quibus ſit $\Delta C = l\Delta T + m\Delta T^2 + n\Delta T^3 + \text{etc.}$ (Vol. I. §. 84.); habebimus ergo in (3) (4)

$$\frac{\Delta S}{\Delta T} > C \quad \text{et} \quad \frac{\Delta S}{\Delta T} < C + l\Delta T + m\Delta T^2 + n\Delta T^3 + \text{etc.};$$

vel

$$\frac{\Delta S}{\Delta T} < C \quad \text{et} \quad \frac{\Delta S}{\Delta T} > C - l\Delta T - m\Delta T^2 - n\Delta T^3 - \text{etc.}$$

6. Utroque caſu debebit itaque per (Vol. I. §. 131.) exponens rationis differentialis ſpatii S ſpectati inſtar unius functionis temporis T eſſe

$$dS = C\,dT.$$

7. Expreſſa ergo celeritate C debita tempori T per certam functionem temporis T, aut ſpatii S, vel expreſſo tempore per unam functionem celeritatis C, aut ſpatii S, complectetur aequatio differentialis $dS = C\,dT$ duas tantum variabiles, ejusque integratio dabit ſpatium S per celeritatem C vel tempus T.

349. Corollarium 1.

In omni motu inaequabili progreſſivo, quo intra tempus T conficiatur ſpatium S et generetur celeritas C, accepto tempore T pro variabili abſoluta (Vol. I. §. 4.), quo fiat $dT = 1$ (Vol. I. §. 124.), habebimus per (348. §.)

$$\frac{dS}{dT} = C; \quad d\frac{dS}{dT} = \frac{d^2S}{dT} = dC.$$

350. Corollarium 2.

In (348. §.) eſt $dT = \frac{dS}{C}$: pro hoc valore in (347. §.) ſubſtituto inveniemus ſequentes formulas, quarum ope ſubſidio calculi integralis relatio inter ſpatium S motu inaequabili dependente a vi variabili V intra quodcunque tempus confectum et celeritatem C, quam mobile in fine ejusdem temporis debet habere, poterit determinari, modo ipſa vis variabilis V per certam functionem celeritatis C vel ſpatii S poſſit exprimi.

$$C\,dC = \frac{2g}{M} V\,dS.$$

351. Corollarium 3.

Et conſiderato tempore T, quo vis variabilis V datam maſſam M ſecundum directionem per ejus centrum gravitatis tranſeuntem ad motum continuo ſollicitet, inſtar variabilis abſolutae (Vol. I. §. 4.), per cujus functiones ſpatium S, celeritas C, et ipſa vis V debeant determinari; obtinebimus ex (347. 349. §.) ſequentem aequationem differentialem, ex qua, ſi antea vis variabilis V per congruam functionem temporis T exprimatur, ope primae integrationis quotiens $\frac{\varepsilon S}{\varepsilon T}$ ſeu exponens εS, et ope ſecundae integrationis ipſum ſpatium S poterit derivari.

$$\varepsilon\left(\frac{\varepsilon S}{\varepsilon T}\right) = \frac{\overset{2}{\varepsilon} S}{\varepsilon T} = \frac{2g}{M} V \varepsilon T;$$

$$\text{vel } \overset{2}{\varepsilon} S = \frac{2g}{M} V \varepsilon T^2.$$

352. Theorema.

Fig. 62. *Datum quodcunque ſyſtema plurium maſſarum* A', B', C', - - - P' (62. Fig.) *incedet eodem motu progreſſivo, ſeu ſingulae maſſae* A', B', C', - - - P' *a totidem viribus* A, B, C, - - - P, *iisdem maſſis proportionalibus ad motum ſecundum directiones* a A, b B, c C, - - - p P *inter ſe parallelas et per illarum centra gravitatis tranſeuntes continuo ſollicitentur, ſeu, illis abſentibus, totum ſyſtema ab unica* V *aequali ſummae virium* A, B, C, - - - P *ſecundum directionem* GV *per centrum gravitatis ſyſtematis tranſeuntem et parallelam directionibus virium* A, B, C, - - - P *ad motum continuo urgeatur.*

Demonſtratio.

1. Poſſibile eſt, ut eo momento, quo datum ſyſtema a datis viribus urgeri incipit, totum ſyſtema vel quieſcat, vel ad motum progreſſivum certa celeritate γ ſecundum earundem virium directiones vel directiones illis oppoſitas jam ſit determinatum (313. §.).

2. Quodſi ergo ſingulae maſſae A', B', C', - - - P' a totidem viribus A, B, C, - - - P ad motum continuo ſollicitentur; debebunt hae ejusmodi motus progreſſivos in maſſis A', B', C', - - - P' producere, quales producerentur, ſi, denotante m maſſulam cujuslibet minimae particulae cujusvis maſſae A', B', C', - - - P', quaevis minima particula maſſae A' a

vi

vi $A\frac{m}{A^1}$, quaevis maſſae B^1 a vi $B\frac{m}{B^1}$, quaevis maſſae C^1 a v $C\frac{m}{C^1}$, - - - quaevis maſſae P^1 a vi $P\frac{m}{P^1}$, ad motum continuo ſollicitaretur (331. §.): cum igitur per hypotheſim ſit $A:B = A^1:B^1$, $A:C = A^1:C^1$, - - - $A:P = A^1:P^1$, adeoque $B = A\frac{B^1}{A^1}$, $C = A\frac{C^1}{A^1}$, - - - $P = A\frac{P^1}{A^1}$; perſpicuum eſt, vires A, B, C, - - - P ejusmodi motus in maſſis A^1, B^1, C^1 - - - P^1 producturas, quales producerentur, ſi quaevis minima particula cujuslibet maſſae a vi $= A\frac{m}{A^1}$ ad motum continuo urgeretur. Hinc et ex (1) evidenter jam ſequitur, motum totius ſyſtematis futurum progreſſivum, qualem vires aequales $A\frac{m}{A^1}$, $A\frac{m}{A^1}$, $A\frac{m}{A^1}$, etc. producerent, ſi ab his, abſentibus viribus A, B, C, - - - P, ſingulae minimae particulae ſingularum maſſarum A^1, B^1, C^1, - - - P^1 ſecundum directiones parallelas directionibus aA, bB, cC, - - - - pP, ad motum continuo urgerentur (318. §.).

3. Si vero totum ſyſtema ab unica vi $V = A + B + C + - - - + P$ ad motum ſecundum directionem GV per centrum gravitatis ejusdem ſyſtematis tranſeuntem impellatur, quia totum ſyſtema inſtar unius corporis rigidi determinatae figurae, cujus maſſa aequetur ſummae $A^1 + B^1 + C^1 + - - - + P^1$ maſſarum illud conſtituentium, poteſt conſiderari (118. §.); producet vis V motum progreſſivum, qualem, abſente illa, producerent vires aequales minimas quasque particulas maſſarum A^1, B^1, C^1, - - - P^1 ad motum ſecundum directiones parallelas directioni GV continuo ſollicitantes, ſi, denotante m maſſulam cujusvis particulae, quaevis earundem virium aequalium eſſet $= V\frac{m}{A^1 + B^1 + C^1 + - - - + P^1}$ (331. §.), vel

$$= \frac{m(A + B + C + - - - + P)}{A^1 + B^1 + C^1 + - - - + P^1} = m\frac{\left(A + A\frac{B^1}{A^1} + A\frac{C^1}{A^1} + - - - + A\frac{P^1}{A^1}\right)}{A^1 + B^1 + C^1 + - - - + P^1} = A\frac{m}{A^1},$$

ob $B = A\frac{B^1}{A^1}$, $C = A\frac{C^1}{A^1}$, - - - $P = A\frac{P^1}{A^1}$, ut in (2).

4. Utroque ergo caſu (2) (3), incedet totum ſyſtema tali motu progreſſivo, qualis locum haberet, ſi ſingulae minimae particulae ſingularum maſſarum A^1, B^1, C^1, - - - P^1 idem ſyſtema conſtituentium a viribus aequalibus,

libus, quarum quaevis ſit $= A\frac{m}{A^{I}}$, ſecundum directiones parallelas ad motum continuo urgerentur, eoque momento, quo vires ejusmodi agere inciperent, illae particulae vel quieſcerent, vel celeritate γ ad motum ſecundum easdem vel oppoſitas directiones ob (1) jam eſſent determinatae.

353. Corollarium.

Omne corpus, ſi illud in quascunque partes, quarum maſſae ſint A^{I}, B^{I}, C^{I}, - - - P^{I}, mente reſolvatur, poteſt conſiderari inſtar unius ſyſtematis plurium maſſarum (118. §.): quodſi ergo datum corpus, vel quiescens, vel ad motum progreſſivum celeritate γ jam determinatum, ad motum aut ab unica vi V aequali ſummae virium A, B, C, - - - P ſecundum directionem parallelam directioni celeritatis γ et per centrum gravitatis totius corporis tranſeuntem, vel a pluribus viribus A, B, C, - - - - P continuo urgeatur, quae totidem corporis partes A^{I}, B^{I}, C^{I}, - - - P^{I} ſecundum directiones per illarum centra gravitatis tranſeuntes et directioni celeritatis γ parallelas ad motum continuo impellant, atque inter ſe ſint ut maſſae A^{I}, B^{I} C^{I}, - - - P^{I}; debebit totum corpus utroque caſu eodem motu progreſſivo incedere (352. §.).

Scholion.

Inter omnes poſſibiles maſſarum motus ſimpliciſſimus eſt motus progreſſivus, cujus palmares proprietates in praecedentibus expoſuimus: verum, quia ad illius principia determinatio omnium aliorum motuum poteſt revocari, plurimum intereſt, et vim illorum, et uſum quam diſtinctiſſime habere perſpectum. Eapropter ſubjungam exempla aliquot, uſum praecedentis theoriae illuſtratura, quo melius tyrones ad adplicationes, quales per decurſum horum opusculorum explanabuntur, poſſint praeparari.

354. Problema.

Fig. 63. *Data maſſa* M (63. Fig.) *determinatur de quiete ad motum a vi variabili* V *ſecundum directionem* G A *per ejus centrum gravitatis* G *tranſeuntem, ab eademque tempore* T *continuo urgetur; cognita functione celeritatis* C *tempori* T *debitae, per quam vim* V *exprimere liceat; determinare motum maſſae* M.

Solutio.

Solutio.

1. Clarum eſt, maſſam M motu progreſſivo ſecundum directionem GA inceſſuram (331. §.), cujus determinatio exigit, ut et celeritas C, quam illa intra datum quodcunque tempus T acquirat, et ſpatium S definiatur, quod intra idem tempus debeat conficere.

2. Vis maſſam M ad motum continuo ſollicitans creſcit continuo vel decreſcit, ita ut in fine temporis T determinatae ſit magnitudinis, quam, per hypotheſim, determinata functio V celeritatis C intra idem tempus genitae debebit exprimere. Quodſi ergo hanc functionem loco V in (347. §.) ſubſtituas, complectetur aequatio differentialis $\partial C = \frac{2gV}{M} \partial T$ binas tantum variabiles C et T, quae ſeparatae dabunt $\frac{\partial C}{V} = \frac{2g}{M} \partial T$: igitur integrando invenies aequationem $\int \frac{\partial C}{V} = \frac{2g}{M} T$, per quam relatio inter celeritatem C et tempus T perfecte determinabitur.

3. Per (2) poterit inveſtigari celeritas C tempori T debita: ſi illa determinetur per quamcunque functionem temporis T, ſubſtituta hac functione loco C in (348. §.), obtinebitur nova aequatio differentialis $\partial S = C \partial T$ inter variabiles S et T ſeparatas, cujus integratio dabit ſpatium $S = \int C \partial T$ intra tempus T percurrendum.

4. Et ſi ſpatium S per celeritatem C determinare cupias, independenter a tempore T; functio V vim impellentem per C exprimens ſubſtituatur in (350. §.): invenietur enim aequatio differentialis $\frac{C \partial C}{V} = \frac{2g}{M} \partial S$ inter duas tantum variabiles C, S, cujus proinde integratio dabit S per C.

5. Dum vis impellens maſſam M ſecundum directionem GA continuo creſcit, motus progreſſivus maſſae M continuo acceleratur: aſt, ſi vis illa continuo decreſcat, fieri poteſt, ut ea aliquando penitus evaneſcat, quo caſu motus maſſae M initio accelerabitur, tum convertetur in aequabilem, illa determinata celeritate C, quam maſſa M eo momento habuerit, quo vis impellens evanuerit (293. §.). Motus aequabilis maſſae M, cognita celeritate C, qua is perficiatur, per (265. 266. §.) facillime poterit determinari: quamobrem, quia per hypotheſim datur functio celeritatis C vim impellentem V exprimens, ponatur haec functio aequalis nihilo,

et ex aequatione $V=0$ quaeratur valor pro C: hac enim ratione definietur celeritas conſtans C, qua data maſſa M poſt certum tempus aequabiliter progredietur. Si vero et tempus hoc, et ſpatium intra illud percurſum noſſe cupias; quaerantur aequationes indeterminatae inter C et T, S et T per (2) (3): ſi enim in prima aequatione loco C ſubſtituas celeritatem conſtantem derivatam ex aequatione $V=0$; obtinebis tempus T, intra quod illa generatur: et ſi hoc ipſum tempus ſubſtituas in ſecunda aequatione inter S et T; invenies ſpatium S eodem tempore percurſum.

Exemplum.

Maſſa M = 1000 ℔ *determinatur de quiete ad motum a vi variabili* u = 100 ℔, *quae continuo decreſcens eodem tempore et celeritatem* $\gamma = 6$ *pedibus producat, et decrementum* d = 10 ℔ *patiatur; decrementa vero, quae ipſa intra quaevis duo tempora ab initio motus computata patiatur, ſint inter ſe in ratione directa celeritatum iisdem temporibus genitarum.*

I. Sit C celeritas quocunque tempore T producta, et D decrementum, quod vis initialis u intra hoc tempus patiatur; erit per hypotheſim

$$\gamma : C = d : D, \text{ hinc } D = \frac{dC}{\gamma}.$$

Quamobrem vis, qua maſſa M in fine temporis T ad motum ſecundum directionem GA urgebitur, erit aequalis vi initiali u imminutae decremento D, nimirum

$$V = u - \frac{dC}{\gamma} = 100 - \frac{5C}{3} \text{ ℔}.$$

II. Hoc jam valore ſubſtituto in (347. §.) obtinebimus aequationem differentialem hanc:

$$\partial C = \frac{2g}{M}\left(u - \frac{dC}{\gamma}\right)\partial T; \text{ ſeu } \frac{\partial C}{u\gamma - dC} = \frac{2g}{\gamma M}\partial T.$$

Integrando ergo per (Vol. I. 252. §.) inveniemus

$$\text{Conſt} - \frac{1}{d}\log(u\gamma - dC) = \frac{2g}{\gamma M} T.$$

Cum autem maſſa M de quiete ad motum determinata ſit, adeoque pro $T=0$ etiam $C=0$ eſſe debeat; debebit conſtans per (Vol. I. §. 238.) ex

aequa-

aequatione $\text{Conſt} - \frac{1}{d}\log u\gamma = 0$ determinari, nimirum $\text{Conſt} = \frac{1}{d}$ $\log u\gamma$: conſequenter erit

$$\frac{1}{d}\log u\gamma - \frac{1}{d}\log(u\gamma - dC) = \frac{2g}{\gamma M}T;$$

$$\text{adeoque } \frac{\gamma M}{2gd}\ \log\frac{u\gamma}{u\gamma - dC} = T.$$

Porro fiet

$$\log\frac{u\gamma}{u\gamma - dC} = \frac{2gdT}{\gamma M}:$$

Igitur pro baſi e logarithmorum naturalium obtinebimus

$$\frac{u\gamma}{ug - dC} = e^{\frac{2gdT}{\gamma M}};$$

et hinc fit

$$C = \frac{u\gamma}{de^{\frac{2gdT}{\gamma M}}}\left(e^{\frac{2gdT}{\gamma M}} - 1\right).$$

Si vero M, γ, d per numeros datos exprimas, et loco g numerum juxta (323. §.) ſubſtituas, habebis

$$T = \frac{12}{0{,}625}\ \log\frac{60}{60 - C};$$

$$C = \frac{60}{e^{\frac{0{,}625}{12}T}}\left(e^{\frac{0{,}625}{12}T} - 1\right).$$

Nimirum data celeritate C invenietur tempus T, quo illa ſit producta, et dato tempore T definietur celeritas C, ſumto pro e valore juxta (Vol. I. §. 42.).

III. Pro eadem functione celeritatis C vim V in (1) exprimente obtinebimus per (350. §.)

$$C\partial C = \frac{2g}{M}\left(u - \frac{dC}{\gamma}\right)\partial S; \text{ ergo erit}$$

$$\partial S = \frac{M\gamma}{2g}\ \frac{C\partial C}{u\gamma - dC}.$$

Integratio autem dabit

$$S = \frac{M\gamma}{2gd^2}\left(-dC - u\gamma \log(u\gamma - dC)\right) + \text{Conſt.}$$

Cum vero initio motus pro $C = 0$ debeat eſſe etiam $S = 0$; invenietur valor conſtantis per (Vol. I. §. 238.), nimirum

$$0 = -\frac{M\gamma}{2gd^2} \cdot u\gamma \log u\gamma + \text{Conſt};$$

$$\text{et Conſt} = \frac{M\gamma}{2gd^2} \cdot u\gamma \log u\gamma.$$

Quamobrem debet eſſe

$$S = \frac{M\gamma}{2gd^2}\left(u\gamma \log \frac{u\gamma}{u\gamma - dC} - dC\right).$$

Et ſi pro M, γ, g, d, ut in (II) ſubſtituantur numeri, invenietur pro S ſequens expreſſio:

$$S = \frac{12}{0{,}625}\left(60 \log \frac{60}{60 - C} - C\right).$$

IV. Verum vis variabilis $V = u - \frac{dC}{\gamma}$ fiet pro $C = \frac{u\gamma}{d} = 60$ ped. aequalis nihilo in (I): maſſa M incedet ergo motu accelerato, quamdiu fuerit $\frac{dC}{\gamma} < u$, hinc $C < \frac{u\gamma}{d}$ ſeu $C < 60$ ped.; pro quavis ejusmodi celeritate invenietur et tempus T, quo illa ſit genita, per (II), et ſpatium S intra idem tempus percurſum per (III). Utprimum autem maſſa M celeritatem $C = 60$ ped. acquiſiverit; progredietur illa hac celeritate motu perpetuo aequabili, quovis tempore t confectura ſpatium $Ct = 60t$ ped. Si tempus T quaeras, intra quod celeritas haec conſtans $C = 60$ ped. acquiritur, et ſpatium S, quod intra idem tempus percurritur, cum pro hac celeritate fiat

$$\log \frac{60}{60 - C} = \log 60 - \log(60 - C) = \log 60;$$

debebit eſſe per (II) (III)

$$T = \frac{12}{0{,}625} \log 60; \quad S = \frac{144}{0{,}125}(\log 60 - 1).$$

Et pro log nat $60 = 4{,}094344$ etc. fiet

$$T = 78{,}6''; \quad S = 3564{,}6 \text{ ped.};$$

Quam-

Quamobrem, ſi petatur ſpatium S^I, quod maſſa M intra quodcunque tempus T^I ab initio motus computatum debeat percurrere, exiſtente $T^I > 78{,}6''$, puta $T^I = 78{,}6'' + t$; debebit poni

$$S^I = 3564{,}6 + 60\,t \text{ ped.}$$

355. Problema.

Data maſſa M (63. Fig.) *quieſcens a vi variabili* V *ſecundum directionem* GA *per ejus centrum gravitatis* G *tranſeuntem et determinatur ad motum, et continuo ſollicitatur; eſt autem vis* V *ejusmodi, ut illa per certam functionem temporis, quo motus durat, perfecte poſſit exprimi: determinare motum maſſae* M. Fig. 63.

Solutio.

1. Maſſa M incedet nunc quoque motu progreſſivo ſecundum directionem GA (331. §.), ad cujus completam determinationem ſufficiet et celeritatem C, quam data maſſa M intra datum tempus T acquirat, et ſpatium S inveſtigare, quod illa eodem tempore percurrat.

2. Cum jam vis V, qua maſſa M in fine dati cujuscunque temporis T ad motum urgetur, per certam functionem hujus temporis poſſit exprimi; ſubſtituatur haec functio loco V in (347. §.); complectetur aequatio differentialis $\partial C = \frac{2g}{M} V \partial T$ binas tantum variabiles C et T ſeparatas, eoque ipſo poterit ope calculi integralis determinari celeritas C intra tempus T producenda.

3. Si porro functionem temporis T exprimentem celeritatem C eodem tempore productam, quam juxta (2) determinare licuerit, in (348. §.) ſubſtituas; obtinebis novam aequationem differentialem $\partial S = C \partial T$ inter duas variabiles S, T, ex qua ope calculi integralis invenietur ſpatium S tempore T percurrendum.

4. Si conſtet, vim maſſam M ad motum urgentem creſcente tempore T continuo decreſcere; ponatur functio V temporis T vim, qua maſſa M in fine ejusdem temporis urgetur, per hypotheſim exprimens aequalis nihilo, et ex aequatione $V = 0$ eruatur valor temporis T: valor enim iſte determinabit tempus T, quo elapſo vis maſſam M ad motum ſollicitans penitus evaneſcet; conſequenter progredietur poſt hoc tempus maſſa M motu perpetuo aequabili illa determinata celeritate C, quae intra idem

 tempus

tempus fuerit genita, atque hanc conſtantem celeritatem derivabis ex aequatione integrali inter C et T in (2) inventa, ſi valorem ex aequatione $V=0$ erutum loco T in illa ſubſtituas; eodem autem valore loco T ſubſtituto in aequatione integrali inter S et T in (3) inventa, definietur ſpatium S, quod durante motu accelerato eodem tempore maſſa M debet conficere.

Exemplum.

Maſſa $M=1000$ ℔ *impellatur ad motum a vi* $u=100$ ℔ *continuo decreſcente, ita ut illa primo minuto ſecundo patiatur decrementum* $d=20$ ℔, *et decrementa intra duo quaecunque tempora ab initio motus computata ſint inter ſe ut radices quadratae temporum.*

1. Pro decremento D, quod vis u intra tempus T patiatur, erit $\sqrt{1''}:\sqrt{T}=d:D=dT^{\frac{1}{2}}$: vis, qua maſſa M in fine temporis T urgebitur, erit ergo

$$V=u-dT^{\frac{1}{2}}=100-20\,T^{\frac{1}{2}}\text{ ℔}.$$

2. Hinc (1) per (347. §.) obtinebimus celeritatem C, quam maſſa M intra datum quodcunque tempus T acquiret, ut ſequitur.

$$\partial C=\frac{2g}{M}\left(u-dT^{\frac{1}{2}}\right)\partial T;$$

$$C=\frac{2g}{M}\left(uT-\tfrac{2}{3}dT^{\frac{3}{2}}\right)=0{,}3125\left(10T-\tfrac{4}{3}T^{\frac{3}{2}}\right).$$

3. Et pro hac celeritatis expreſſione inveniemus per (348. §.) ſpatium S, quod intra tempus T debet confici, nimirum hoc modo.

$$\partial S=\frac{2g}{M}\left(uT-\tfrac{2}{3}dT^{\frac{3}{2}}\right)\partial T;$$

$$S=\frac{2g}{M}\left(\tfrac{1}{2}uT^2-\frac{4d}{15}T^{\frac{5}{2}}\right)=0{,}0625\left(25T^2-\tfrac{8}{3}T^{\frac{5}{2}}\right).$$

4. Pro $V=0$ in (1) fit $T=\frac{u^2}{d^2}$: maſſa M debebit ergo progredi motu perpetuo aequabili, utprimum ab initio motus effluxerit tempus

$$T=\frac{u^2}{d^2}=25''.$$

Celeritas,

Celeritas, quam intra hoc tempus acquiret, et ſpatium, quod eodem tempore percurret, fiet ergo ob (2) (3)

$$C = 0{,}3125\left(10 \cdot 25 - \tfrac{4}{3} \cdot 25^{\frac{3}{2}}\right) = 26{,}042 \text{ ped.}$$

$$S = 0{,}0625\left(25 \cdot 25^2 - \tfrac{8}{3} 25^{\frac{5}{2}}\right) = 4557{,}292 \text{ ped.}$$

5. Maſſa M incipiet itaque progredi ſecundum directionem G A motu accelerato, intra quodvis tempus T celeritatem C per (2) acquiſitura, et ſpatium S per (3) determinabile percurſura: verum motus hic non niſi 25 minutis ſecundis durabit, poſt quae erit motus maſſae M perpetuo aequabilis, celeritate $C = 26{,}042$ ped. perficiendus (4). Spatium ergo, quod maſſa M, poſtquam ejus motus fuerit aequabilis, quovis tempore t percurret; eſt $Ct = 26{,}042\,t$: ſi autem quaeratur ſpatium quocunque tempore $T = 25'' + t$ ab initio motus computato percurrendum: cum primis 25 minutis ſecundis motu accelerato conficiatur ſpatium $S = 4557{,}292$ ped.; erit illud ſpatium $= 4557{,}292 + 26{,}042\,t$ ped.

DISSERTATIO X.

DE LAPSU CORPORUM GRAVIUM PER PLANA INCLINATA ET LINEAS CURVAS.

356. Definitio.

Fig. 64. *Planum inclinatum* FGH (64. Fig.) vocatur, quod plano horizontali DE (44. §.) ſub angulo acuto occurrit. Tertium planum idque verticale, conſequenter perpendiculare ad planum horizontale DE (44. §.), ſecet tam hoc planum in IK, quam planum inclinatum in AC, ſic ut illud ſit quoque perpendiculare ad communem interſectionem GH planorum inclinati FG et horizontalis DE; deinde demittatur ex A ad planum horizontale perpendicularis AB, quae interſectioni IK in puncto B debebit occurrere: hac ratione obtinebitur in eodem plano verticali triangulum rectangulum ABC, complectens *Angulum inclinationis* ACB, *Longitudinem* AC, *Altitudinem* AB, et *Baſim* BC, plani inclinati FG.

357. Corollarium.

Pro angulo inclinationis ACB $= \alpha$, longitudine AC $= l$, altitudine AB $= a$, et baſi BC $= b$ dati plani inclinati FG, erit (356. §.)

$$a \operatorname{Cos} \alpha = b \operatorname{Sin} \alpha;\quad a = l \operatorname{Sin} \alpha;\quad b = l \operatorname{Cos} \alpha.$$

Scholion.

Praecipui caſus, qui in deſcenſu corporum gravium per plana inclinata poſſunt occurrere, in eo conſiſtunt, quod corpus per planum, ſuper quo jacet, aut motu lubricationis, aut motu rotationis deſcendat: priorem motum concipiet e. gr. corpus figurae cubicae, poſteriorem autem corpus figurae ſphaericae. In praeſenti diſſertatione ſolum motum lubricationis conſiderare, ejusque geneſim et naturam exponere conſtituimus, ab omnibus hujus motus obſtaculis, ut e. gr. eſt adfrictus et aeris reſiſtentia, mentem abſtracturi.

358. Pro-

358. Problema.

Dato angulo inclinationis $=\alpha$, *datoque pondere* P *corporis* uxy *ſuper plano inclinato* FG *jacentis; invenire vim ipſum ad deſcenſum ſollicitantem.*

Solutio.

1. Cogitetur per centrum gravitatis c corporis uxy duci planum verticale, a quo ſecetur planum horizontale DE in IK, et inclinatum FG in AC, ſic ut illud ſit ſimul perpendiculare ad communem interſectionem HG plani inclinati et horizontalis; neceſſe eſt, ut, ſi ex A demittatur perpendiculum AB ad planum horizontale, et ex centro gravitatis c corporis uxy ducatur cb perpendicularis ad planum inclinatum FG, linea item verticalis ca (42. §.), lineae cb, ca, et triangulum ABC in eodem plano verticali jaceant, triangulumque ABC ad B rectangulum angulum inclinationis, longitudinem, altitudinem, et baſim plani inclinati complectatur (356. §.). Ducatur demum in eodem plano verticali recta cd parallela plano inclinato, adeoque perpendicularis ad cb; erit angulus bca aequalis angulo inclinationis $\alpha=$ACB, et dca illius complementum ad rectum (356. §.).

2. Corpus jam uxy urgetur a gravitate ad deſcenſum ſecundum directionem verticalem (42. §.) eadem prorſus ratione, qua illud omni gravitate deſtitutum a vi ejus ponderi P aequali urgeretur, ſi haec directione verticali ca immediate in centrum gravitatis c ageret (148. 331. §.): quare, cum vis P in punctum c agens directione ca, ob angulum bca$=\alpha$ et illius complementum dca ad rectum (1), in duas vires poſſit reſolvi, quarum una $=$P Coſα agat directione cb perpendiculari ad planum inclinatum FG (1) et altera $=$P Sinα directione cd parallela plano inclinato (1) per (115. §.); clarum eſt, ab his ſolis viribus dependere deſcenſum corporis uxy.

3. Verum, quia planum FG, et rigidum per hypotheſim (60. §.) et immobile, totam actionem vis $=$P Coſα directione perpendiculari cb centrum gravitatis c maſſae uxy verſus illud prementis ſuſtinet; perſpicuum eſt, hanc vim nullum abſolute motum poſſe producere: in determinatione motus maſſae uxy ſuper plano inclinato FG ſufficiet ergo ſupponere, praeter vim $=$P Sinα centrum gravitatis c directione cd parallela plano inclinato, et in eodem plano verticali jacente, in quo jacet

 rectan-

rectangulum ABC altitudinem, longitudinem, angulumque inclinationis plani inclinati complectens, urgentem, nihil eſſe, quod in motum maſſae uxy quaqua ratione influat (2) (1).

359. Corollarium 1.

Motus corporis uxy vi ſuae gravitatis per planum inclinatum FG deſcendentis erit progreſſivus, quo ſingula ejus puncta ſecundum directiones inter ſe et plano inclinato parallelas promovebuntur (358. 331. §.).

360. Corollarium 2.

Centrum gravitatis c corporis uxy, ubicunque hoc jaceat ſuper plano inclinato FG, ſollicitatur ad motum a vi invariabili $= P \operatorname{Sin} \alpha$ per pondus P ejusdem corporis et angulum inclinationis α dati plani inclinati determinata (294. §.): motus progreſſivus, quo corpus uxy per planum FG deſcendere cogitur (359. §.), debet ergo uniformiter accelerari (333. §.).

361. Corollarium 3.

Si in plano verticali tranſeunte per centrum gravitatis c corporis uxy, in quo jacent rectae cb, ca, cd, et rectangulum ABC (358. §. 1. n), recta cd utrinque produci cogitetur; debebit illa occurrere perpendiculo AB producto in A^1, erectoque ad BC perpendiculo $CC^1 = AA^1 = BB^1$; erit rectangulum $A^1B^1C^1$ ſimile et aequale rectangulo ABC, in cujus hypothenuſa A^1C^1 centrum gravitatis c corporis uxy per planum FG deſcendentis debet moveri (358. §. 3. n.).

362. Corollarium 4.

Spatium, quod centrum gravitatis c corporis uxy per planum inclinatum FG deſcendentis tempore quocunque conficiat, dabit ſpatium, quod ipſum corpus uxy eodem tempore percurret; et celeritas, quam centrum gravitatis c illo tempore acquiſiverit, dabit celeritatem corporis uxy intra idem tempus genitam (359. 316. §.): in determinatione motus corporis gravis uxy per planum inclinatum FG deſcendentis licebit ergo ipſum corpus inſtar unius puncti gravis c conſiderare, quod per hypothenuſam rectanguli $A^1B^1C^1$ angulum inclinationis $A^1C^1B^1 = ACB$, longitudinem $A^1C^1 = AC$, altitudinem $A^1B^1 = AB$, et baſim $B^1C^1 = BC$ plani inclinati complectentis, cogatur deſcendere (361. 358. §. 1. n.).

363. Co-

363. Corollarium 5.

Ut vero omni caſu motus corporis uxy ſuper plano inclinato rite determinetur, ſupponatur id omnis gravitatis eſſe expers, et a vi $= P \operatorname{Sin} \alpha$, per pondus P ejus maſſae proportionale et angulum inclinationis α dati plani determinata, ad motum ſecundum directionem per ipſius centrum gravitatis tranſeuntem atque longitudini plani inclinati parallelam continuo ſollicitari (358. §. 3. n.).

364. Corollarium 6.

Ex. (360. 275. 281. 282. §.) generatim ſequitur, ſpatia, quae a corpore gravi per planum inclinatum de quiete deſcendente diverſis temporibus ab initio deſcenſus computatis percurruntur, eſſe inter ſe, ut quadrata eorundem temporum, celeritatumque intra haec tempora genitarum; ipſas vero celeritates eſſe inter ſe in ratione ſimplici directa temporum.

365. Problema.

Si corpus grave in puncto f *plani inclinati* ABC *exiſtens* (362. §.) *deſcenſum verſus* C *celeritate* γ *inchoet; invenire ſpatium* s, *quod illud dato tempore* t *percurret, et celeritatem* c, *quam in fine temporis* t *habebit.* Fig. 65.

Solutio.

Sit P pondus corporis et maſſa ei proportionalis (52. §.), angulus autem inclinationis ſit $\alpha = ACB$; erit ob (363. §.) per (343. §. 4. n.).

$$s = \gamma t + g \frac{P \operatorname{Sin} \alpha}{P} t^2; \quad c = \gamma + 2g \frac{P \operatorname{Sin} \alpha}{P} t:$$

debet ergo eſſe

$$s = \gamma t + g t^2 \operatorname{Sin} \alpha; \quad c = \gamma + 2 g t \operatorname{Sin} \alpha.$$

366. Corollarium 1.

Si quaeratur tempus t, intra quod corpus in puncto f plani inclinati exiſtens, deſcenſumque celeritate γ inchoans datum ſpatium $s = fC$ percurret, et celeritas c, quam illud in puncto C habeat; erit per (365. §.)

$$t = \frac{\sqrt{(4 g s \operatorname{Sin} \alpha + \gamma^2)} - \gamma}{2 g \operatorname{Sin} \alpha}; \quad c = \sqrt{(4 g s \operatorname{Sin} \alpha + \gamma^2)}.$$

367. Corollarium 2.

Ponamus autem corpus grave exiſtens in puncto f plani inclinati deſcenſum per ſpatium $fC = s$ inchoare celeritate γ debita altitudini Ak determinatae per parallelam fk baſi BC, et quaeri tam tempus t deſcenſus per ſpatium fC, quam celeritatem corporis in puncto C: cum hoc caſu ſit $\gamma = 2\surd g . Ak$ per (329. §.), et $\text{Sin}\,\alpha = \text{Sin}\,ACB = \text{Sin}\,Afk = \frac{Ak}{Af} = \frac{Bk}{fC}$; habebimus ob (366. §.)

$$t = \frac{\surd(4g.fC.\frac{Bk}{fC} + 4g.Ak) - 2\surd g.Ak}{2g\,\text{Sin}\,\alpha};$$

$$c = \surd(4g.fC.\frac{Bk}{fC} + 4g.Ak):$$

adeoque erit

$$t = \frac{\surd AC - \surd Ak}{\text{Sin}\,\alpha.\surd g}; \text{ et } c = 2\surd g.AC.$$

368. Corollarium 3.

Si corpus grave ſuum deſcenſum per planum inclinatum de quiete inchoet, erit $\gamma = 0$ in (365. §.), et $\text{Sin}\,\alpha = \frac{a}{l}$ (357. §.): datis ergo angulo inclinationis $\alpha = ACB$, longitudine $l = AC$, et altitudine $a = AB$ plani inclinati, poterit determinari tam ſpatium s, quod corpus grave de quiete deſcendens per planum inclinatum quovis dato tempore t ab initio deſcenſus computato conficiet, et celeritas c, quam eodem tempore acquiret, nimirum per (365. §.).

$$s = g\,t^2\,\text{Sin}\,\alpha = \frac{g\,a\,t^2}{l}; \quad c = 2\,g\,t\,\text{Sin}\,\alpha = \frac{2\,g\,a\,t}{l}.$$

369. Corollarium 4.

Tempus t, intra quod corpus grave per planum inclinatum de quiete deſcendens datum ſpatium s conficiet, celeritatemque c acquiret, erit per (368. §.).

$$t = \sqrt{\frac{s}{g\,\text{Sin}\,\alpha}} = \sqrt{\frac{l\,s}{g\,a}};$$

$$t = \frac{c}{2\,g\,\text{Sin}\,\alpha} = \frac{l\,c}{2\,g\,a}.$$

370. Corollarium 5.

Ex (369. 368. §.) naſcentur porro ſequentes formulae, quarum prior dabit ſpatium s a corpore gravi per planum inclinatum de quiete deſcendente conficiendum, ut illud datam celeritatem c acquirat; poſterior autem dabit celeritatem c, quam idem corpus deſcendens per datum ſpatium s acquiret.

$$s = \frac{c^2}{4g\,\mathrm{Sin}\,\alpha} = \frac{l\,c^2}{4ga};$$

$$c = 2\sqrt{gs\,\mathrm{Sin}\,\alpha} = 2\sqrt{\frac{gas}{l}}.$$

371. Corollarium 6.

Si duo corpora gravia de quiete deſcendant per duo plana inclinata, quorum anguli inclinationis ſint α, α^{I}; erunt ſpatia s, s^{I} eodem tempore T percurſa, et celeritates c, c^{I} intra idem tempus acquiſitae inter ſe ut ſinus angulorum inclinationis: erit enim per (368. §.)

$$s = gT^2\,\mathrm{Sin}\,\alpha; \quad s^{I} = gT^2\,\mathrm{Sin}\,\alpha^{I};$$

$$c = 2gT\,\mathrm{Sin}\,\alpha; \quad c^{I} = 2gT\,\mathrm{Sin}\,\alpha^{I}:$$

$$\text{igitur } s : s^{I} = \mathrm{Sin}\,\alpha : \mathrm{Sin}\,\alpha^{I} = c : c^{I}.$$

372. Corollarium 7.

Tempora t, t, intra quae duo corpora gravia per integras longitudines l, L ducrum planorum inclinatorum, altitudines a, A habentium, de quiete deſcendant; erunt inter ſe, ut longitudines diviſae per radices quadratas altitudinum, nimirum per (369. §.)

$$t = \sqrt{\frac{l^2}{ga}}; \quad T = \sqrt{\frac{L^2}{gA}}:$$

$$\text{igitur } t : T = \frac{l}{\sqrt{a}} : \frac{L}{\sqrt{A}}.$$

373. Corollarium 8.

Tempora t, T deſcenſus duorum corporum gravium per integras longitudines duorum planorum inclinatorum ejusdem altitudinis $a = A$, vel ejusdem longitudinis $l = L$, erunt inter ſe ut ipſae longitudines caſu primo, vel in ratione inverſa radicum quadraticarum ipſarum altitudinum caſu altero, ſeu erit (372. §.)

$$t : T = l : L \text{ pro } a = A;$$

$$t : T = \sqrt{A} : \sqrt{a} \text{ pro } l = L.$$

374. Corollarium 9.

Theoria motus corporum gravium per plana inclinata deſcendentium poteſt ſervire ad inveſtigandam altitudinem g, per quam corpora gravia de quiete libere labentia primo minuto ſecundo decidant (325. §.). Tempus enim deſcenſus corporis gravis per totam longitudinem $s = l$ dati plani inclinati eſt $t = \sqrt{\frac{l}{g \text{ Sin } \alpha}}$ (369. §.): hoc ergo erit eo majus, proinde eo facilius accuratiusque poterit illud obſervari, quo major fuerit longitudo l plani inclinati, quove minor fuerit angulus inclinationis α. Quamobrem, ſi conſtruatur planum inclinatum notabilis longitudinis l et parvae altitudinis, ut eo minor ſit angulus inclinationis, tum obſervetur tempus t, intra quod grave aliquod corpuſculum per totam longitudinem l deſcendat; invenietur $g = \frac{l}{t^2 \text{ Sin } \alpha}$.

Scholion.

Indubium eſt, facilius obſervari tempus t deſcenſus corpuſculi gravis per longitudinem plani inclinati, quam tempus liberi lapſus per certam altitudinem (327. §.): certum porro eſt, quod, ſi ſuperficies plani inclinati probe laevigata ſit, et corpuſculum grave ſuper illo deſcendens figuram ſphaericam habeat, adeo exigua ſit futura reſiſtentia ab adfrictu pendens, ut illa penitus contemni queat: verum ſemper aderunt alia motus obſtacula (e. gr. aeris reſiſtentia), ob quae alia, hac accuratior, methodus inveſtigandi altitudinem g merito deſiderabitur.

375. Theorema.

Tempus deſcenſus corporis gravis per totam longitudinem l *dati plani inclinati eſt ad tempus liberi lapſus per altitudinem* a *ejusdem plani, ſicut longitudo* l *ad altitudinem* a.

Demonſtratio.

Si corpus tempore T deſcendat per totam longitudinem $s = l$ plani inclinati, vel tempore t per illius altitudinem a libere labatur; erit

$$T = \sqrt{\frac{l^2}{a g}} \text{ per (369. §.);}$$

$$t = \sqrt{\frac{a}{g}} \text{ per (326. §.):}$$

adeoque erit $T : t = \sqrt{\frac{l^2}{a g}} : \sqrt{\frac{a}{g}} = l : a.$

376. Theo-

376. Theorema.

Celeritas, quam corpus grave per totam longitudinem l plani inclinati de quiete deſcendens poteſt acquirere, aequatur celeritati debitae altitudine a ejusdem plani (329. §.).

Demonſtratio.

Celeritas in deſcenſu per totam longitudinem $l = s$ dati plani inclinati acquiſita erit $c = 2\sqrt{g\,a}$ (370. §.): haec ipſa vero celeritas debetur altitudini a ejusdem plani inclinati (329. §.).

377. Theorema.

Si fe ad longitudinem AC *perpendicularis occurrat altitudini* AB *plani inclinati productae in* e; *debebit corpus grave in* A *exiſtens eodem tempore per partem* Af *plani inclinati deſcendere, quo tempore illud libero lapſu altitudinem* Ae *percurreret.*

Demonſtratio.

1. Tempus per Af eſt $t = \sqrt{\frac{AC.Af}{AB.g}}$ (369. §.): tempus vero liberi lapſus per altitudinem Ae debet eſſe $T = \sqrt{\frac{Ae}{g}}$ (326. §.).

2. Sed in triangulis, ad B, f rectangulis et inter ſe ſimilibus, ACB, Afe eſt $AB : AC = Af : Ae$: debet ergo eſſe $Ae = \frac{AC.Af}{AB}$, hinc $t = T$ in (1).

378. Corollarium 1.

Ducta ad punctum infimum C perpendiculari hC ad longitudinem plani inclinati AC, quae ejus altitudini AB productae in h occurrat; erit tempus deſcenſus corporis gravis per totam longitudinem AC plani inclinati aequale tempori liberi lapſus per altitudinem Ah (377. §.).

379. Corollarium 2.

Cum chordae AC, Ch (66. Fig.) inſiſtentes diametro Ah dati circuli ſint ad invicem perpendiculares; patet, cur corpus grave eodem tempore per datam quamcunque chordam AC circuli ſitum verticalem habentis debeat deſcendere, quo illud libere labens per diametrum verticalem Ah ejusdem circuli decideret (378. §.): diameter verticalis Ah, et omnes chordae Aa, Ab, Ac, ſi per illas totidem corpora gravia deſcendunt, percurrentur eodem tempore, id eſt, erunt *ſpatia iſochrona.* Fig. 66.

380. Pro-

380. Problema.

Fig. 65. *Corpori gravi in puncto infimo* C *plani inclinati* ABC (65. Fig.) *exiſtenti impreſſa ſit celeritas* γ, *qua illud ſecundum directionem parallelam plano inclinato* AC *per idem planum motu progreſſivo verſus* A *cogatur aſcendere: invenire ſpatium* s = Cf *dato tempore* t *conficiendum, et celeritatem* c, *quam idem corpus in fine temporis* t *in puncto* f *plani inclinati habebit.*

Solutio.

Si P ſit et pondus et ei proportionalis maſſa corporis gravis (52. §.); debebit eſſe ob (363. §.) per (343. §.)

$$s = \gamma t - g \frac{P \,\mathrm{Sin}\, \alpha}{p} t^2;\ c = \gamma - 2g \frac{P \,\mathrm{Sin}\, \alpha}{P} t:$$

$$\text{ergo } s = \gamma t - g t^2 \,\mathrm{Sin}\, \alpha;\ c = \gamma - 2 g t \,\mathrm{Sin}\, \alpha.$$

381. Corollarium 1.

Tempus t, quo corpus grave motu celeritate γ in C inchoato per partem s = Cf plani inclinati AC aſcendet, et celeritas c, quam in f habebit, invenietur ex (380. §.), ut ſequitur:

$$t = \frac{\gamma - \sqrt{(\gamma^2 - 4 g s \,\mathrm{Sin}\, \alpha)}}{2 g \,\mathrm{Sin}\, \alpha};\ c = \sqrt{(\gamma^2 - 4 g s \,\mathrm{Sin}\, \alpha)}.$$

382. Corollarium 2.

Aſcenſus corporis gravis per planum inclinatum CA in C celeritate γ inchoatus fiet celeritate c continuo decreſcente (380. §.); ubi haec evanuerit, corpus vi ſuae gravitatis deſcendere incipiet. Fiet vero celeritas $c = 0$ pro $t = \frac{\gamma}{2 g \,\mathrm{Sin}\, \alpha}$ (380. §.), et pro hoc valore temporis t erit $s = \frac{\gamma^2}{4 g \,\mathrm{Sin}\, \alpha}$ (380. §.): aſcenſus ergo in C celeritate γ inchoatus durabit tempore $t = \frac{\gamma}{2 g \,\mathrm{Sin}\, \alpha}$, ſeu per ſpatium $s = Cf = \frac{\gamma^2}{4 g \,\mathrm{Sin}\, \alpha}$.

383. Problema.

Fig. 67. *Punctum mobile* P *progrediens in recta* DA (67. Fig.) *in* A *celeritate* C *praeditum cogitur motum in recta* AB *ad priorem ſub dato angulo* BAE $= \alpha$ *inclinata continuare; invenire celeritatem, qua illud in* A *hunc motum inchoabit.*

Solutio.

Solutio.

1. Punctum P exiſtens in A talem habet per hypotheſim celeritatem C, qua illud, abſente omni cauſa ejus motum turbante, proximo minuto ſecundo vi ſolius inertiae certum ſpatiolum Ab motu aequabili percurreret (271. 292. §.), adeoque, ducto ba ad AB perpendiculo, ad diſtantiam ab a recta AB, et ad diſtantiam Aa a puncto A promoveretur: quare cum primum recta immobilis AB, in qua punctum P in A exiſtens motum continuare cogitur, penitus impediat; manifeſtum eſt, punctum mobile P per celeritatem C in A ſic eſſe ad motum determinatum, ut illud vi ſolius inertiae ſpatiolum Aa proximo minuto ſecundo motu aequabili ſuper recta AB deberet conficere.

2. Quamobrem, dum punctum P eam celeritatem C ſecundum directionem AE habet, qua illud motu aequabili ſpatiolum Ab proximo minuto ſecundo percurreret; cenſendum eſt punctum P talem habere celeritatem ſecundum novam directionem AB, qua illud motu aequabili ſpatiolum $Aa = Ab \, Coſ \, BAE = Ab \, Coſ \alpha$ proximo minuto ſecundo conficeret (1), id eſt: pro celeritate $C = Ab$ ſecundum directionem AE habebit punctum P in A celeritatem $c = Aa = C \, Coſ \alpha$, qua illud motum directione AB debebit inchoare (264, 271. §.).

384. Corollarium 1.

Si punctum mobile P celeritate C incedat in recta DA motu aequabili, et in A cogatur ſuper recta AB ſub dato angulo $\alpha = BAE$ ad DA inclinata motum continuare; progredietur illud ſecundum directionem AB motu pariter aequabili celeritate $c = C \, Coſ \alpha$ eo majore, quo minor fuerit angulus inclinationis $\alpha = BAE$ (383. §.): erit autem haec celeritas, ob $Coſ \alpha = 1$, ſemper minor celeritate C, decrementumque celeritatis ob curvedinem viae DAB in puncto A erit $= C - C \, Coſ \alpha = C \, Sin \, v \alpha$.

385. Corollarium 2.

Punctum mobile P in A ad motum aequabilem ſecundum directionem Aa celeritate γ determinatum (68. Fig.) cogatur moveri in linea ABCDEFGH ex rectis AB, BC, - - - GH numero quocunque n compoſita, quarum quaevis ad proxime praecedentem ſub determinato angulo $\alpha = aAB = bBC = cCD = dDE = eEF = fFG = gGH$ ſit inclinata: progredietur punctum P per AB celeritate $= \gamma \, Coſ \alpha$, et decrementum Fig. 68.

 celeri-

celeritatis ob angulum in A erit $=\gamma \text{Sin v}\alpha$; adeoque incedet idem punctum per BC celeritate $=\gamma \text{Coſ}\alpha^2$, et decrementum celeritatis ob angulos in A, B erit $=\gamma \text{Sin v}\alpha^2$; hinc fiet celeritas puncti P per CD incedentis $=\gamma \text{Coſ}\alpha^3$, et decrementum celeritatis ob angulos in A, B, C erit $=\gamma \text{Sin v}\alpha^3$; et ſic generatim erit $\gamma \text{Coſ}\alpha^n$ celeritas, qua punctum P per GH incedet, et decrementum celeritatis initialis γ ob omnes angulos A, B, C, - - - G erit $\gamma \text{Sin v}\alpha^n$ (384. §.).

386. Corollarium 3.

Sit AEH curva quaecunque nullibi per cuſpides aut puncta regreſſus (Vol. I. §. 441.) interrupta; poſſibile erit, ducta ad A tangente Aa chordas AB, BC, CD, - - - GH ita ducere, ut quaevis illarum ad proxime praecedentem ſub angulo $\alpha = \text{aAB}$ inclinetur. Quidquid ſit numerus n harum chordarum, debebit punctum mobile P, ſi id in A, ad motum aequabilem celeritate γ ſecundum directionem tangentis Aa determinatum, cogatur moveri in linea ABCDEFGH ex iisdem chordis compoſita, in H habere celeritatem $=\gamma \text{Coſ}\alpha^n$, et per totam viam pati decrementum celeritatis $=\gamma \text{Sin v}\alpha^n$ (385. §.): quo minor fuerit angulus $\alpha = \text{aAB}$, eo minores, eoque plures erunt chordae AB, BC, - - - GH in curva AEH; celeritas $\gamma \text{Coſ}\alpha^n$ puncti mobilis P in H erit eo major, et decrementum celeritatis $\gamma \text{Sin v}\alpha^n$ ob viae in A, B, C, - - - G curvedinem eo minus; pro $\alpha = 0$ fieret decrementum celeritatis $\gamma \text{Sin v}\alpha^n = 0$, et celeritas puncti P in H puncto $\gamma \text{Coſ}\alpha^n = \gamma$. Quare, cum curva AEH ſit limes, ad quem linea ex chordis AB, BC, - - - GH compoſita eo propius debet accedere, quo magis decreſcit angulus $\alpha = \text{aAB}$, quemve illa eo duntaxat determinato caſu attingeret, ſi fieret $\alpha = 0$; clarum eſt, punctum mobile P, in A ſecundum directionem tangentis Aa ad motum aequabilem celeritate γ determinatum, ſi illud in curva AEH moveri cogatur, eandem celeritatem γ, confecta via AEH in puncto H, proinde in quovis puncto ejusdem curvae habiturum.

387. Corollarium 4.

Si ergo punctum mobile P in data curva AEH progrediens a vi quacunque x in quovis puncto curvae ſecundum directionem tangentis eidem puncto debitae ad motum urgeatur; debebit celeritas puncti P ob continuam vis x actionem eadem prorſus lege mutari, qua mutaretur, ſi

punctum

punctum P a vi x perpetuo ſecundum eandem directionem in una recta ad motum ſollicitaretur: ſecus enim deberet ob ſolam viae curvedinem certa mutatio in celeritatem redundare, contra (386. §.).

388. Problema.

Data aequatione ad curvam BD (69. Fig.) *inter ejus coordinatas orthogonas* $x = Ea$, $y = Pa$, *in qua maſſa* M *inſtar unius puncti conſideranda moveri cogatur, dataque vi invariabili, quae illam in quovis curvae puncto* P *ſecundum directionem* Pb *parallelam axi abſciſſarum* ED *ad motum ſollicitet; invenire tempus* T *motus per arcum* $BP = s$, *et celeritatem* C *eidem tempori in puncto* P *debitam.* Fig. 69.

Solutio.

1. Sit V vis, quae maſſam M in P exiſtentem ſecundum directionem Pb parallelam axi abſciſſarum ED, adeoque perpendicularem ad ordinatam Pa ad continuationem motus per arcum PD urgeat; poterit, ducta ad P tangente Pf, et ad hanc perpendiculari Pd, vis V in duas vires reſolvi, quarum una $= V \operatorname{Coſ} fPb$ in punctum P agat directione Pf, et altera $= V \operatorname{Sin} fPb$ directione Pd (115. §.). Maſſa M premetur ergo a vi $= V \operatorname{Sin} fPb$ verſus curvam BD in P ſecundum directionem Pd perpendicularem ad tangentem fP; curva BD utpote rigida et immobilis ſuſtinebit ergo totam actionem vis $V \operatorname{Sin} fPb$ directione Pd agentis. Quare debet maſſa M ſic conſiderari, ac ſi illa in quovis puncto P curvae ab una vi $= V \operatorname{Coſ} fPb$ ſecundum directionem tangentis Pf in eodem puncto ad motum urgeretur, unde neceſſario ſequitur, ob (386. §.) per (350. §.) debere eſſe

$$C \partial C = 2g \frac{V \operatorname{Coſ} fPb}{M} \partial s.$$

2. Sed ob angulum rectum aPb eſt $\operatorname{Coſ} fPb = \operatorname{Sin} aPf = \frac{\partial x}{\partial s}$ (Vol. I. §. 455. 469.): hoc itaque valore ſubſtituto in (1) habebimus

$$C \partial C = 2g \frac{V}{M} \partial x.$$

Quodſi jam aequatio haec ita integretur, ut pro $x = EF = e$ fiat celeritas maſſae $C = 0$ in puncto B; debebit eſſe

$$\tfrac{1}{2} C^2 = \frac{2gV}{M} x + \text{Conſt}, \quad \text{et } 0 = \frac{2gV}{M} e + \text{Conſt};$$

 hinc

$$\text{et } C = -\sqrt{\frac{r}{2g}} \cdot \text{Arc Sin} \frac{2e - 2r - e}{2r - e} = -\sqrt{\frac{r}{2g}} \cdot \text{Arc Sin} - 1,$$

$$\text{ſeu Conſt} = \sqrt{\frac{r}{2g}} \cdot \text{Arc Sin } 1 = \tfrac{1}{2}\pi \sqrt{\frac{r}{2g}}.$$

Conſequenter debet eſſe

$$T = \left(\text{Arc Sin} \frac{2x - (2r + e)}{2r - e} + \tfrac{1}{2}\pi\right)\sqrt{\frac{r}{2g}}.$$

393. Corollarium 1.

Si $x = Ea$ abeat in $x = ED$, abibit arcus cycloidis BP in BD: pro $x = ED = 2r$ erit ergo ob (392. §.) tempus deſcenſus per arcum cycloidis BD

$$T = \left(\text{Arc Sin} \frac{2r - e}{2r - e} + \tfrac{1}{2}\pi\right)\sqrt{\frac{r}{2g}} = (\text{Arc Sin } 1 + \tfrac{1}{2}\pi)\sqrt{\frac{r}{2g}};$$

$$\text{ſeu } T = (\tfrac{1}{2}\pi + \tfrac{1}{2}\pi)\sqrt{\frac{r}{2g}} = \pi\sqrt{\frac{r}{2g}}.$$

394. Corollarium 2.

Tempus ergo deſcenſus corpuſculi gravis per quemvis arcum BD cycloidis jacentis in plano verticali, ita ut diameter ED circuli genitoris axem cycloidis exhibens ſit verticalis, eſt conſtans $= \pi\sqrt{\frac{r}{2g}}$ (395. §.): quotcunque idcirco arcus DP, DB, DH ex vertice D abſcindantur; debebit corpuſculum grave per quemvis arcum ex P, B, H eodem tempore ad D decidere, id eſt: cyclois eſt *linea tautochrona*.

395. Problema.

Sit GDH *ſemicirculus radio* $r = ED$ *deſcriptus jacens in plano verticali, ita ut diameter* GH *ſit horizontalis, et radius* ED *verticalis: invenire tempus* T, *quo data maſſa* M *inſtar puncti ſpectata per arcum* BP *debebit deſcendere, ſi illa a data vi invariabili* V *perpetuo ſecundum directionem verticalem radio* ED *parallelam ad motum deorſum urgeatur.*

Solutio.

1. Pro abſciſſis a centro E computatis $x = Ea$, et ordinatis orthogonis $y = Pa$, exiſtente $EF = e$, debebit eſſe per (389. §.)

$$\partial T = \frac{1}{2\sqrt{\frac{gV}{M}}} \cdot \frac{\sqrt{(\partial y^2 + \partial x^2)}}{\sqrt{(x - e)}}.$$

Fiat

Fiat vero $z = Da$, et $b = FD$; erit $x = r - z$; $\partial x = -\partial z$, et $e = r - b$: cum ergo ſit

$$y = \sqrt{(2rz - z^2)};\ \partial y = \frac{(r-z)\partial z}{\sqrt{(2rz - z^2)}};\ \text{erit}$$

$$\partial T = \frac{r}{2\sqrt{\frac{gV}{M}}} \cdot \frac{\sqrt{\left(\frac{(r-z)^2 \partial z^2}{2rz - z^2} + \partial z^2\right)}}{\sqrt{(r-z) - (r-b)}};$$

$$\text{ſeu } \partial T = \frac{r}{2\sqrt{\frac{gV}{M}}} \cdot \frac{\partial z}{(2rz - z^2)^{\frac{1}{2}} (b-z)^{\frac{1}{2}}}.$$

Sed decreſcente variabili $z = Da$ creſcit arcus BP, et tempus T deſcenſus per eundem arcum: debet ergo poni

$$\partial T = -\frac{r}{2\sqrt{\frac{gV}{M}}} \cdot \frac{\partial z}{z^{\frac{1}{2}}.(2r-z)^{\frac{1}{2}}.(b-z)^{\frac{1}{2}}}.$$

2. Ut jam exponens hic differentialis juxta (Vol. I. §. 361. Schol. 2.) poſſit integrari, reſolvatur functio $(2r-z)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{(2r-z)^{\frac{1}{2}}}$ in ſeriem infinitam per (Vol. I. §. 53.), et ſinguli ejus termini ducantur in $-\frac{r}{2\sqrt{\frac{gV}{M}}} \cdot \frac{\partial x}{z^{\frac{1}{2}}(b-z)^{\frac{1}{2}}}$; debebit eſſe in (1)

$$\partial T = -\tfrac{1}{2}\left(\frac{rM}{2gV}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{\partial z}{z^{\frac{1}{2}}\sqrt{(b-z)}} + \text{- - - - - - - - - -} \right.$$

$$\left. + \text{- - - -} + \frac{1.3.5 \ldots (2n-1)}{2.4.6 \ldots 2n(2r)^n} \cdot \frac{z^{\frac{2n-1}{2}}.\partial z}{\sqrt{(b-z)}}\right).$$

Factor ſub vinculo continet ſeriem, cujus ſinguli termini poſt primum ordine naturali ſequentes ex parte indeterminata ejusdem factoris derivabuntur, ſi ſucceſſive fiat $n = 1$, $n = 2$, $n = 3$, $n = 4$, et ſic porro.

3. Captis itaque ſingulorum terminorum integralibus in (2), debebit fieri

$$T = -\tfrac{1}{2}\left(\frac{rM}{2gV}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int\frac{\partial z}{z^{\frac{1}{2}}\sqrt{(b-z)}} + \cdots\cdots\right.$$

$$\left. + \frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots 2n(2r)^n}\int\frac{z^{\frac{2n-1}{2}}\partial z}{\sqrt{(b-z)}}\right).$$

4. Sed per (Vol. I. §. 287. 302.) erit primum et ſecundum integrale

$$\int\frac{\partial z}{z^{\frac{1}{2}}\sqrt{(b-z)}} = \text{Arc Sin}\,\frac{2z-b}{b};$$

$$\int\frac{z^{\frac{2n-1}{2}}\partial z}{\sqrt{(b-z)}} = \left(-\frac{z^{\frac{2n-1}{2}}}{2n} - \frac{(2n-1)bz^{\frac{2n-3}{2}}}{2n(2n-2)}\right.$$

$$-\frac{(2n-1)(2n-3)b^2.z^{\frac{2n-5}{2}}}{2n(2n-2)(2n-4)}$$

$$-\;-\;-\;-\;-\;-\;-\;-\;-\;-\;-\;-\;-\;-\;-$$

$$\left.-\frac{(2n-1)(2n-3)\ldots5.3.b^{n-1}.z^{\frac{1}{2}}}{2n(2n-2)\;-\;-\;-\;-\;-\;4.2}\right)2\sqrt{(b-z)}$$

$$+\frac{(2n-1)(2n-3)---5.3.1.b^n}{2n(2n-2)\;-\;-\;-\;-\;-\;4.2}\,\text{Arc Sin}\,\frac{2z-b}{b}.$$

5. Quare, ſubſtitutis his integralibus (4) in (3), inveniemus pro tempore T ſequentem expreſſionem:

$$T = -\tfrac{1}{2}\left(\frac{rM}{2gV}\right)^{\frac{1}{2}}\left[\left(\text{Arc Sin}\,\frac{2z-b}{b} + \cdots\cdots\right.\right.$$

$$\left. + \frac{1^2.3^2.5^2\ldots(2n-1)^2.b^n}{2^2.4^2.6^2\ldots(2n)^2(2r)^n}\cdot\text{Arc Sin}\,\frac{2z-b}{b}\right)$$

$$-\frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots2n(2r)^n}\left(\frac{z^{\frac{2n-1}{2}}}{2n} + \frac{(2n-1)bz^{\frac{2n-3}{2}}}{2n(2n-2)}\right.$$

$$+\frac{(2n-1)(2n-3)b^2.z^{\frac{2n-5}{2}}}{2n(2n-2)(2n-4)} + \cdots\cdots$$

$$\left.\left.+\frac{(2n-1)(2n-3)---5.3.b^{n-1}.z^{\frac{1}{2}}}{2n(2n-2)\;-\;-\;-\;-\;4.2}\right)2\sqrt{(b-z)}\right] + C.$$

6. Hoc

6. Hoc modo determinatur tempus T per duas ſeries, unam trigonometricam complectentem Arc Sin $\frac{2z-b}{b}$, et alteram algebraicam: inveniuntur autem ſinguli termini utriusque ſeriei poſt terminum primum trigonometricum Arc Sin $\frac{2z-b}{b}$ ordine naturali ſequentes, ſi ſucceſſive ponatur $n=1$, $n=2$, $n=3$, $n=4$, et ſic porro. Ut vero etiam conſtans quantitas per (Vol. I. §. 238.) rite determinetur, animadvertendum eſt, tempus T deſcenſus per arcum BP pro $z=FD=b$ fieri aequale nihilo: cum igitur pro $z=b$ tota pars algebraica in (5) fiat aequalis nihilo, et $\text{Arc Sin}\frac{2z-b}{b}=\text{Arc Sin}\frac{2b-b}{b}=\text{Arc Sin}\,1=\frac{1}{2}\pi$; erit in (5)

$$0=-\frac{1}{2}\left(\frac{rM}{2gV}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}\pi+---+\frac{1^2.3^2\ldots(2n-1)^2.b^n}{2^2.4^2\ldots(2n)^2\,(2r)^n}\cdot\frac{1}{2}\pi\right)+C,$$

$$\text{hinc } C=\frac{\pi}{4}\left(\frac{rM}{2gV}\right)^{\frac{1}{2}}\left(1+---+\frac{1^2.3^2.5^2\ldots(2n-1)^2.b^n}{2^2.4^2.6^2\ldots(2n)^2.(2r)^n}\right).$$

7. Quapropter tempus deſcenſus per arcum BP erit pro quavis variabili $z=Da$, et altitudine $b=DF$ in (5) (6)

$$T=\Bigg[\left(1+---+\left(\frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots\ldots 2n}\right)^2\cdot\left(\frac{b}{2r}\right)^n\right)\left(\frac{\pi}{2}-\text{ArcSin}\frac{2zb}{b}\right)$$

$$+\frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots 2n(2r)^n}\left(\frac{z^{\frac{2n-1}{2}}}{2n}+\frac{(2n-1)bz^{\frac{2n-3}{2}}}{2n(2n-2)}\right.$$

$$+---------+-------------$$

$$\left.+\frac{(2n-1)(2n-3)---5.3.b^{n-1}.z^{\frac{1}{2}}}{2n(2n-2)-------4.2}\right)2\sqrt{(b-z)}\Bigg]\frac{1}{2}\left(\frac{rM}{2gV}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

396. Corollarium 1.

Pro $z=0$ fiet pars algebraica integralis in (395. §. 7. n.) aequalis nihilo; in parte vero trigonometrica erit pro $z=0$

$$\frac{\pi}{2}-\text{ArcSin}\frac{2z-b}{b}=\frac{\pi}{2}-\text{ArcSin}-1=\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}=\pi.$$

Quare, cum pro $z=0$ arcus BP in BD abeat; obtinebimus ex (395. §. 7. n.) ſequentem expreſſionem temporis, quo maſſa M inſtar puncti ſpectata, ſi ea a vi invariabili V perpetuo ſecundum directionem verticalem deorſum urgeatur, per arcum BD circuli e centro E radio $r=ED$ deſcripti, et in plano verticali jacentis debebit deſcendere.

T=

$$T = \frac{\pi}{2}\left(\frac{rM}{2gV}\right)^{\frac{1}{2}}\left(1 + --- + \left(\frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots\ldots2n}\right)^2 \cdot \left(\frac{b}{2r}\right)^n\right) =$$

$$= \frac{\pi}{2}\left(\frac{rM}{2gV}\right)^{\frac{1}{2}} + \frac{\pi}{2}\left(\frac{rM}{2gV}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{1^2}{2^2} \cdot \frac{b}{2r} + \frac{1^2.3^2}{2^2.4^2} \cdot \left(\frac{b}{2r}\right)^2\right.$$

$$\left. + \frac{1^2.3^2.5^2}{2^2.4^2.6^2} \cdot \left(\frac{b}{2r}\right)^3 + --- + \left(\frac{1.3\ldots(2n-1)}{2.4\ldots\ldots2n}\right)^2 \cdot \left(\frac{b}{2r}\right)^n\right).$$

397. Corollarium 2.

Si corpuſculum grave, cujus maſſam pondusque ei proportionale denotet M, vi ſuae gravitatis per arcum BD circuli in plano verticali jacentis deſcendere cogatur; vis ipſum ad deſcenſum ſecundum directionem verticalem deorſum continuo ſollicitatura aequabitur ejus ponderi M: tempus deſcenſus per arcum BD erit ergo ob (396. §.)

$$T = \frac{\pi}{2}\left(\frac{r}{2g}\right)^{\frac{1}{2}} + \frac{\pi}{2}\left(\frac{r}{2g}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{1^2}{2^2} \cdot \frac{b}{2r} + ------\right.$$

$$\left. + ----- + \left(\frac{1.3\ldots(2n-1)}{2.4\ldots\ldots\ldots2n}\right)^2 \cdot \frac{b^n}{(2r)^n}\right).$$

Scholion.

Uſum ultimi problematis inferius in theoria motus pendulorum videbimus. Tranſibimus jam ad aliam motus ſpeciem, qualis fere perpetuo occurrit in machinis. Hactenus enim plerumque motum rectilineum et progreſſivum maſſarum, pendentem a quibuscunque viribus, variabilibus aut invariabilibus, prae oculis habuimus: ſequitur, ut de motu maſſarum circa axes fixos tractemus. Cum autem univerſa hujus motus theoria doctrinae de *momento inertiae* innitatur, haec autem, abſolute ſpectata, fit pure geometrica, ab omni motus notione independens; praemittemus in ſequenti diſſertatione tractatum de momento inertiae, in quo et palmares illius proprietates evolvemus, et ejusdem quantitatem pro corporibus datae figurae determinare docebimus.

DISSER-

DISSERTATIO XI.

DE MOMENTO INERTIAE.

398. Definitio.

Doctrina de momento inertiae, de cujus inveſtigatione tractare conſtituimus, poſtulat, ut data corpora ad rectas poſitione datas relata cogitentur, quae nomine *Axium* ſolent intelligi: quodſi enim corpus aliquod in minimas particulas mente reſolvatur, et quaevis particula per quadratum ſuae diſtantiae a dato axe multiplicari cogitetur; aggregatum omnium productorum erit *Momentum inertiae totius corporis reſpectu dati axeos.* Alia momenta inertiae inuſitata ſunt in diſquiſitionibus mechanicis: ut vero eo clarius et ordinatius nonnullas proprietates momenti inertiae reſpectu datorum axium exponere, inveſtigationemque ipſius pro certis caſibus eo commodiorem reddere liceat; momenta quoque inertiae reſpectu datorum planorum in conſiderationem vocabimus. Nimirum, ſi quaevis minima particula alicujus corporis cogitetur multiplicari per quadratum illius diſtantiae a plano poſitione dato; erit aggregatum omnium productorum *Momentum inertiae totius corporis reſpectu ejusdem plani.*

399. Corollarium 1.

Momentum inertiae ſummae plurium maſſarum reſpectu dati axeos vel plani aequale eſt ſummae momentorum ſingularum maſſarum reſpectu ejusdem axeos vel plani (398. §.).

400. Corollarium 2.

Adeoque momentum inertiae p maſſae P aequalis differentiae $S-Q$ duarum maſſarum S, Q reſpectu dati axeos vel plani aequabitur differentiae $s-q$ momentorum s, q harum maſſarum reſpectu ejusdem axeos vel plani: nimirum ob $S=P+Q$ hinc $s=p+q$ (399. §.), erit $p=s-q$.

401. Corollarium 3.

Si data maſſa variabilis K, cujus momentum inertiae reſpectu dati axeos vel plani ſit k, vel incrementum aliquod X capiat, vel decrementum X patiatur; debebit neceſſario etiam illius momentum inertiae k capere certum incrementum x, vel pati decrementum x, aequale momento inertiae maſſae X reſpectu ejusdem plani vel axeos (399. 400. §.).

402. Corollarium 4.

Sit μ momentum inertiae datae maſſae M relatae ad axem vel planum A. Si tota maſſa M in unico puncto in diſtantia $= k$ ab axe vel plano A collecta concipiatur; erit Mk^2 illius momentum inertiae reſpectu ejusdem axeos vel plani (398. §.): igitur erit $\mu = Mk^2$, modo diſtantia k ſic determinetur, ut ſit $k = \sqrt{\frac{\mu}{M}}$. Licebit itaque momentum inertiae cujuslibet maſſae M reſpectu dati axeos vel plani A aequare producto Mk^2 ex eadem maſſa in quadratum rectae k determinantis diſtantiam puncti, in quo tota maſſa M collecta idem haberet momentum inertiae μ reſpectu ejusdem axeos vel plani A.

403. Corollarium 5.

Fig. 70. Datus axis BC (70. Fig.) conſideretur inſtar communis interſectionis duorum planorum ABCD, EFBC angulum rectum DCE comprehendentium, p vero ſit minima particula datae cujuscunque maſſae. Si ad plana AC, FC ducantur perpendicula pa, pc, et pb ſit perpendicularis ad axem BC; erunt pab, pcb rectangula ſimilia, et aequalia: igitur fiet $p.pb^2 = p(pa^2 + ab^2) = p.pa^2 + p.pc^2$. Quare, ſi maſſa quaecunque M in minimas particulas mente reſolvatur, et cum dato axe BC conjungantur bina quaecunquae plana ad invicem perpendicularia, quorum communis interſectio ſit ipſe axis BC; erit productum ex qualibet particula p maſſae M in quadratum diſtantiae pb ab axe BC aequale ſummae productorum ex eadem particula in quadrata illius diſtantiarum pa, pc a planis AC, FC: igitur *momentum inertiae cujuslibet maſſae M reſpectu dati axeos BC aequatur ſummae momentorum inertiae ejusdem maſſae reſpectu duorum planorum AC, FC ſeſe in dato axe interſecantium* (398. §.).

404. Corollarium 6.

Si minimae particulae datae maſſae inaequaliter diſtent ab axe vel plano poſitione dato; erit illius momentum inertiae reſpectu dati axeos vel plani majus producto ex tota maſſa in quadratum diſtantiae minimae, et ſimul minus producto ex tota maſſa in quadratum diſtantiae maximae (398. §.)

405. Problema.

Dato momento inertiae corporis cujuscunque Z reſpectu axeos IK transeuntis per illius centrum gravitatis G; invenire ejus momentum inertiae reſpectu alterius axeos CD priori paralleli (71. Fig.). Fig. 71.

Solutio.

1. Sit AB planum, in quo jacent axes IK, CD, et LH, EF ſint plana inter ſe parallela ad planum AB in IK, CD perpendicularia; erit diſtantia planorum LH, EF aequalis diſtantiae D = Gg centri gravitatis G dati corporis Z ab axe CD.

2. Si porro, denotante M maſſam corporis Z, denotet MG^2 illius momentum inertiae reſpectu axeos IK, Mg^2 vero momentum inertiae reſpectu novi axeos CD, et A, H, F ſint ejus momenta inertiae reſpectu planorum AB, LH, EF; debebit eſſe per (403. §.)

$$MG^2 = A + H; \quad Mg^2 = A + F:$$

$$\text{igitur} \quad Mg^2 = MG^2 + F - H.$$

3. Cum planum LH tranſeat per centrum gravitatis G dati corporis Z; dividet illud hoc corpus in duas partes ad diverſas ejusdem plani partes jacentes, ita ut quaevis particula unius partis corporis Z extra plana LH, EF alicubi in q, et quaevis alterius partis alicubi intra eadem plana in p vel extra in r debeat jacere.

4. Si ex quavis particula p vel r ducatur ad planum LH perpendicularis pa vel ra, quae plano EF occurrat in b; erit

$$p.pb^2 = p(ab - pa)^2 = p(Gg - pa)^2;$$

$$r.rb^2 = r(ar - ab)^2 = r(ar - Gg)^2:$$

$$\text{igitur} \quad p.pb^2 = p(D - pa)^2 = p.D^2 + p.pa^2 - 2p.pa.D;$$

$$r.rb^2 = r(ar - D)^2 = r.D^2 + r.ar^2 - 2r.ar.D.$$

Et ſi ex qualibet particula q ducatur ad planum LH perpendicularis qa, quae plano EF in b occurrat; erit

$$q.qb^2 = q(ab+qa)^2 = q(Gg+qa)^2:$$

igitur $q.qb^2 = q(D+qa)^2 = q.D^2 + q.qa^2 + 2q.qa.D.$

5. Hinc (4) generatim ſequitur, productum ex quavis minima particula z dati corporis Z in quadratum illius diſtantiae a plano EF obtentum iri, ſi producto ex particula z in quadratum ejus diſtantiae a plano LH addatur productum ex eadem particula in quadratum diſtantiae D=Gg, tum duplum productum ex particula z in illius diſtantiam a plano LH multiplicatum per D vel addatur ſummae illorum productorum, vel indidem ſubtrahatur, prout particula z alicubi in q, vel alicubi in p aut r jacet.

6. Cum ergo omnes minimae particulae dati corporis Z ita ſint diſtributae reſpectu plani LH, ut aliquae illarum, ut p, r, neceſſario ad partem IOBK, aliae vero, ut q, ad partem oppoſitam IANK debeant cadere (3); debebit aggregatum productorum ex ſingulis particulis corporis Z in quadrata diſtantiarum a plano EF (ſeu F in (2) per §. 398.) ita dependere a ſumma productorum ex iisdem particulis in quadrata reſpectivarum diſtantiarum a plano LH (ſeu ab H in (2) per §. 398.), ut illud ſit proditurum, ſi huic addatur ſumma productorum ex ſingulis minimis particulis maſſam M corporis Z conſtituentibus in D^2 (adeoque productum $M.D^2$ ex tota maſſa M in D^2), et dupla ſumma productorum ex ſingulis particulis ad partem IANK cadentibus in illarum diſtantias a plano LH multiplicata per D=Gg, tum a ſumma ſubtrahatur dupla ſumma productorum ex ſingulis particulis cadentibus ad partem IOBK in diſtantias illarum a plano LH multiplicata per D, ob (5). Quamobrem, quia ſumma productorum ex ſingulis particulis corporis Z jacentibus ad partem IANK plani LH exaequat momentum ſtaticum partis corporis Z ad eandem partem cadentis (3), et ſumma productorum ex ſingulis particulis corporis Z jacentibus ad partem IOBK plani LH dat momentum ſtaticum partis corporis Z ad eandem partem cadentis (3) reſpectu plani LH (147. 52. §.); ſi illud momentum vocetur m, et iſtud m', habebimus $F = H + M.D^2 + 2mD - 2m'D = H + M.D^2 + 2D(m - m')$. Sed momenta ſtatica m, m' partium corporis Z, in quas iſtud a plano LH per ejus centrum gravitatis G tranſe-

tranſeunte dirimitur, reſpectu ejusdem plani ſunt inter ſe aequalia (163. §.); debet ergo eſſe $m - m' = o$, et $F = H + M . D^2$.

7. Hinc vero (6) et ex (2) fit $M g^2 = M G^2 + M . D^2$.

406. Corollarium 1.

Dato momento inertiae maſſae uvxy (72. 73. Fig.) reſpectu axeos mn tranſeuntis per illius centrum gravitatis γ invenietur momentum inertiae ejusdem maſſae reſpectu alterius axeos MN priori paralleli, ſi dato momento addatur productum ex maſſa uvxy in quadratum diſtantiae γC illius centri gravitatis γ a novo axe MN (405. §.). Fig. 72. 73.

407. Corollarium 2.

Et viciſſim, cognito momento inertiae datae maſſae uvxy reſpectu alicujus axeos MN, invenietur illius momentum inertiae reſpectu axeos mn tranſeuntis per centrum gravitatis γ et paralleli axi MN; ſi a dato momento ſubtrahatur productum ex maſſa uvxy in quadratum diſtantiae γC centri gravitatis γ ab axe MN (406. §.).

408. Corollarium 3.

Sit maſſa quaecunque M relata ad tres axes A, B, C, quorum primus A tranſeat per centrum gravitatis ejusdem maſſae, et quivis axium B, C ſit axi A parallelus, ſeu planum, in quo jacent axes A, B idem ſit cum plano, in quod cadunt axes A, C, ſeu ab illo diverſum. Si A', B', C' ſint momenta inertiae maſſae M reſpectu axium A, B, C, axesque B, C jaceant in diſtantiis d, D a centro gravitatis maſſae M; debebit eſſe per (407. §.)

$$A' = B' - M . d^2 ; \quad A' = C' - M . D^2 :$$

$$\text{igitur } B' - M . d^2 = C' - M . D^2 ;$$

$$\text{hinc } C' = B' + M . (D^2 - d^2), \text{ et } B' = C' - M (D^2 - d^2).$$

409. Corollarium 4.

Cognito ergo momento inertiae maſſae M reſpectu certi axeos invenietur momentum inertiae ejusdem maſſae reſpectu cujuscunque alterius axeos priori paralleli, ſi productum ex maſſa M in differentiam quadratorum diſtantiarum illius centri gravitatis ab utroque axe cognito momento addatur, vel ab illo ſubtrahatur, prout diſtantia centri a novo axe, reſpectu

cujus

cujus momentum quaeritur, eſt major vel minor quam illius diſtantia a priori axe, reſpectu cujus momentum noſcitur (408. §.).

410. Corollarium 5.

Hinc (408. §.) porro ſequitur, pro D=d debere eſſe B'=C', id eſt: momenta inertiae cujuslibet maſſae M reſpectu omnium axium inter ſe parallelorum in diverſis planis jacentium et a centro gravitatis maſſae M aequidiſtantium ſunt inter ſe aequalia.

411. Corollarium 6.

Fig. 74. Datis momentis inertiae P, R duarum partium uyx=p, uvx=r conſtituentium maſſam uvxy (74. Fig.) reſpectu axium PQ, RS parallelorum per centra gravitatis G, g illarum partium tranſeuntium, invenietur momentum inertiae A totius maſſae uvxy reſpectu cujusvis tertii axeos AB prioribus paralleli et intra vel extra illos cadentis; ſi ſummae momentorum P, R addatur ſumma productorum ex maſſis p=uyx, r=uvx in quadrata diſtantiarum Ge, gE centrorum gravitatis G, g a novo axe AB. Cum enim in hac hypotheſi ſit $P+p.Ge^2$ momentum inertiae maſſae p=uyx reſpectu axeos AB, et $R+r.gE^2$ momentum inertiae maſſae r=uvx reſpectu axeos AB per (406. §.), et momentum inertiae maſſae uvxr=p+r reſpectu axeos AB debeat aequari ſummae momentorum inertiae maſſarum p, r reſpectu ejusdem axeos (399. §.); neceſſarium eſt, ut illud momentum ſit =

$$P+R+p.Ge^2+r.gE^2.$$

Scholion.

Adplicabimus jam haec ad praecipuas corporum figuras, quales in diſquiſitionibus mechanicis ſolent occurrere. Notent vero ſibi tyrones, in hac quoque diſquiſitione ubique nos maſſas tantum homogeneas et aequabiliter denſas prae oculis habituros, ut per corporum volumina tam illorum maſſas, quam pondera iis proportionalia liceat exprimere, prout id in inveſtigatione centri gravitatis obſervavimus (167. §. Schol.).

412. Problema.

Fig. 75. *Invenire momentum inertiae dati cujuscunque cylindri recti* ABDC (75. Fig.) *reſpectu illius axeos* ab.

Solutio.

Solutio.

1. In radio $aB = R$ baſeos capiatur $x = ae$ pro radio cylindri variabilis deqp; erit, poſito axe $ab = a$, maſſa cylindri $ABDC = M = \pi a R^2$, et maſſa cylindri $deqp = m = \pi a x^2$.

2. Si jam variabilis $x = ae$ augeatur quacunque differentia $\Delta x = eg$, abibit cylinder deqp in cylindrum $hgnm = \pi a (x + \Delta x)^2$; quodſi ergo μ denotet momentum inertiae cylindri variabilis $deqp = m$, creſcente variabili $x = ae$ differentia $\Delta x = eg$ creſcet maſſa $m = deqp$ differentia $\Delta m = hgnm - deqp = \pi a (x + \Delta x)^2 - \pi a x^2 = \pi a (2 x \Delta x + \Delta x^2)$, et illius momentum μ creſcet differentia $\Delta \mu$ aequali momento inertiae maſſae Δm (401. §.).

3. Minima diſtantia particularum maſſam $\Delta m = hgnm - deqp$ inter ſuperficies convexas cylindrorum deqp, hgnm interceptam conſtituentium ab axe ab eſt radius $ae = x$, et diſtantia maxima radius $ag = x + \Delta x$: momentum inertiae $\Delta \mu$ maſſae Δm reſpectu axeos ab eſt ergo majus producto $\Delta m . x^2$ et minus producto $\Delta m (x + \Delta x)^2$ per (404. §.). Ob (2) habebimus ergo pro quavis utcunque exigua differentia $\Delta x = eg$

$$\Delta \mu > \pi a (2 x \Delta x + \Delta x^2) . x^2;$$

$$\text{et } \Delta \mu < \pi a (2 x \Delta x + \Delta x^2)(x + \Delta x)^2;$$

adeoque fiet

$$\frac{\Delta \mu}{\Delta x} > 2 \pi a x^3 + \pi a x^2 \Delta x;$$

$$\text{et } \frac{\Delta \mu}{\Delta x} < 2 \pi a x^3 + \pi a (5 x^2 \Delta x + \Delta x \Delta x^2 + \Delta x^3).$$

4. Exponens rationis differentialis functionis μ aequalis momento inertiae cylindri deqp debet ergo ob (3) per (Vol. I. §. 131.) eſſe

$$\partial \mu = 2 \pi a x^3 \partial x; \text{ hinc } \mu = \tfrac{1}{2} \pi a x^4.$$

5. Quodſi jam fiat $x = aB = R$; obtinebitur momentum inertiae totius cylindri ABDC per (1) (4)

$$\mu = \tfrac{1}{2} \pi a R^4 = \tfrac{1}{2} M . R^2.$$

413. Corollarium 1.

Momentum inertiae cylindri excavati (75. Fig.), cujus cavitas deqp ſit cylindrica ejusdem axeos $ab = a$, reſpectu axeos ab erit aequale differentiae momenti inertiae $\frac{1}{2} \pi a r^4$ maſſae cavitatem explentis a momento Fig. 75.

 inertiae

inertiae $\frac{1}{2}\pi a R^4$ totius cylindri ABDC pro perfecte pleno accepti (412. §.), denotante $r = ae$ radium cavitatis et $R = aB$ radium totius cylindri (400. §.): ſi ergo μ denotat momentum inertiae cylindri excavati, et M illius maſſam ſeu pondus (411. §. Schol.), erit

$$\mu = \tfrac{1}{2}\pi a R^4 - \tfrac{1}{2}\pi a r^4 = \tfrac{1}{2}\pi a (R^2 - r^2)(R^2 + r^2);$$

$$\text{ſeu } \mu = \tfrac{1}{2}\pi a (R^4 - r^4) = \tfrac{1}{2} M (R^2 + r^2).$$

414. Corollarium 2.

Momentum inertiae cylindri ABDC reſpectu axeos AC paralleli axi ab et jacentis in ejus convexa ſuperficie, cum centrum gravitatis cylindri in ab ſit ſitum (219. §.) erit $= \frac{1}{2}\pi a R^4 + \pi a R^2 . R^2 = \frac{3}{2}\pi a R^4 = \frac{3}{2} M . R^2$ (412. 406. §.). Si vero deſideretur momentum inertiae cylindri ABDC reſpectu cujuscunque alterius axeos EF axi ab paralleli; invenietur id $= \frac{1}{2}\pi a R^4 + \pi a R^2 . aG^2 = \frac{1}{2} M . R^2 + M . aG^2$ pro diſtantia mutua aG axium ab, EF (412. 406. §.).

415. Problema.

Fig. 59. *Data aequatione ad lineam* QX (59. Fig.) *inter coordinatas orthogonas* $x = Qb$, $y = Ab$, *cujus revolutione circa axem* QC *generetur corpus* QXSZRX; *invenire momentum inertiae ſegmenti* QADBE *reſpectu axeos* QC.

Solutio.

1. Si variabilis $x = Qb$ creſcat quacunque differentia $\Delta x = ba$; debebit maſſa $m = AQB$ capere incrementum $\Delta m = ABqp$, et illius momentum inertiae μ reſpectu axeos QC capiet incrementum $\Delta\mu$ aequale momento inertiae maſſae $\Delta m = ABqp$ reſpectu axeos QC per (401. §.); ordinata vero $y = Ab$ aequalis radio ſectionis ADBEA creſcet certa differentia Δy, per quam determinabitur radius $pa = y + \Delta y$ ſectionis prqsp.

2. Iam vero evidens eſt, maſſam $\Delta m = ABqp$ aequari uni parti cylyndri baſeos prqs et altitudinis $ba = \Delta x$, cylindrum vero baſeos ADBEA et altitudinis $ba = \Delta x$ aequalem eſſe uni parti maſſae $\Delta m = ABqp$: momentum ergo inertiae $\Delta\mu$ maſſae Δm (1) erit majus momento inertiae cylindri poſterioris, et minus momento cylindri prioris reſpectu axeos QC (399. §.). Quamobrem, cum ob (1) per (412. §.) ſit $\frac{1}{2}\pi y^4 \Delta x$ momentum inertiae cylindri poſterioris; et $\frac{1}{2}\pi (y + \Delta y)^4 \Delta x$ momentum inertiae cylindri prioris, debebit eſſe

$$\Delta\mu > \tfrac{1}{2}\pi y^4 \Delta x: \quad \Delta\mu < \tfrac{1}{2}\pi (y + \Delta y)^4 \Delta x.$$

3. Quid-

3. Quidquid ſit functio y variabilis x determinata per datam aequationem inter y, x; extare debebunt certi coefficientes f, g, h, etc. independentes a Δx, pro quibus fieret $\Delta y = f\Delta x + g\Delta x^2 + h\Delta x^3 + etc$ (Vol. I. §. 84.), eoque ipſo erunt alii ejusmodi coefficientes A, B, C, etc. poſſibiles, pro quibus fieret $(y+\Delta y)^4 = y^4 + A\Delta x + B\Delta x^2 + C\Delta x^3 + etc.$ (Vol. I. §. 32.): in (2) debebit igitur eſſe

$$\frac{\Delta\mu}{\Delta x} > \tfrac{1}{2}\pi y^4;$$

$$\frac{\Delta\mu}{\Delta x} < \tfrac{1}{2}\pi y^4 + \tfrac{1}{2}\pi(A\Delta x + B\Delta x^2 + C\Delta x^3 + etc.).$$

4. Ob (3) per (Vol. I. §. 131.) erit itaque exponens rationis differentialis functionis μ aequalis momento inertiae ſegmenti $AQB = m$ reſpectu axeos QC

$$\varepsilon\mu = \tfrac{1}{2}\pi y^4 \varepsilon x = \tfrac{1}{2} y^2 \varepsilon m;$$

pro $\varepsilon m = \pi y^2 \varepsilon x$ per (Vol. I. §. 490.).

Quare, ſi ex data aequatione inter y, x exprimatur y per x, vel εx per y et εy, licebit ope calculi integralis tam maſſam m ſegmenti QADBEA, quam illius momentum inertiae μ reſpectu axeos QC determinare.

416. Corollarium 1.

Sit QX linea recta, proinde QXZ conus rectus axeos $QC = a$, et radii baſeos $XC = R$; habebimus pro $x = Qb$, $y = Ab$

$$y : x = R : a;\ \text{hinc}\ y^2 = \frac{R^2}{a^2}x^2;$$

$$\varepsilon m = \frac{\pi R^2}{a^2}x^2\varepsilon x;\ \ \varepsilon\mu = \frac{\pi R^4}{2a^4}x^4\varepsilon x\ (415.\ \S.).$$

Conſequenter integrando inveniemus

$$m = \frac{\pi R^2}{3a^2}x^3;\ \ \mu = \frac{\pi R^4}{10a^4}x^5 = \tfrac{3}{10}m.\frac{R^2x^2}{a^2}.$$

Hinc pro $x = QC = a$ prodibit maſſa $M = \frac{\pi R^2}{3}a$, et momentum inertiae $\mu = \frac{\pi R^4 a}{10} = \tfrac{3}{10}M.R^2$ totius coni recti XQZ reſpectu illius axeos QC.

417. Corollarium 2.

Fig. 57. Momentum inertiae μ coni truncati et recti $bdDB$ (57. Fig.) reſpectu illius axeos cC, ſi M ſit illius maſſa, $dc = r$ radius minoris, $DC = R$ vero radius majoris baſeos, et $Cc = \alpha$ axis, erit aequale differentiae momenti inertiae coni Abd a momento coni ABD (400. §.), adeoque per (416. §.)

$$\mu = \tfrac{1}{10}\pi R^4 . AC - \tfrac{1}{10}\pi r^4 . Ac$$
$$= \tfrac{1}{10}\frac{\pi\alpha R^5}{R-r} - \tfrac{1}{10}\frac{\pi\alpha r^5}{R-r};$$

id eſt

$$\mu = \tfrac{1}{10}\alpha\pi\frac{R^5-r^5}{R-r} = \tfrac{3}{10}M\frac{R^5-r^5}{R^3-r^3}.$$

418. Corollarium 3.

Fig. 59. Sit QX quadrans circuli, et XQZ dimidius globus radii $XC = QC = R$; erit $y^2 = 2Rx - x^2$: igitur in (415. §.) fiet

$$sm = \pi(2Rx - x^2)sx;\quad s\mu = \frac{\pi}{2}(2Rx - x^2)^2 sx.$$

Hinc integrando reperiemus maſſam m ſegmenti ſphaerici AQB pro quavis abſciſſa $x = Qb$, et illius momentum inertiae μ reſpectu axeos QC, nimirum

$$m = \tfrac{1}{3}\pi x^2(3R - x);$$
$$\mu = \tfrac{1}{30}\pi x^3(20R^2 - 15Rx + 3x^2).$$
$$\text{ſeu } \mu = \tfrac{1}{10}m.\frac{20R^2x - 15Rx^2 + 3x^3}{3R - x}.$$

419. Corollarium 4.

Pro $x = QC = R$ in (418. §.) invenietur maſſa m et momentum inertiae μ dimidii globi XQZ reſpectu axeos QC ad baſim $XRZSX$ perpendicularis, nimirum

$$m = \tfrac{2}{3}\pi R^3;\quad \mu = \tfrac{4}{15}\pi R^5 = \tfrac{2}{5}mR^2.$$

Si autem bis ſumas tam maſſam, quam momentum inertiae dimidii globi, invenies maſſam M et momentum inertiae μ totius globi reſpectu illius axeos (399. §.), nimirum

$$M = \tfrac{4}{3}\pi R^3;\quad \mu = \tfrac{8}{15}\pi R^5 = \tfrac{2}{5}MR^2.$$

420. Corollarium 5.

Determinatis momentis inertiae ſegmentorum ſphaericorum AQB, pQq reſpectu axeos QC per (418. §.); invenies momentum inertiae maſſae ABqp, interceptae inter ſectiones ſphaerae ADBE, prqsp inter ſe parallelas et axi QC per illarum centra b, a tranſeunti perpendiculares, reſpectu ejusdem axeos, ſi momentum ſegmenti AQB ſubtrahas a momento ſegmenti pQq per (400. §.).

421. Corollarium 6.

Momentum inertiae globi excavati, ita ut illius cavitas ſit ſphaera concentrica, reſpectu axeos ejusdem reperietur aequalis differentiae momenti maſſae cavitatem explentis a momento totius globi pro perfecte ſolido accepti (400. §.): quodſi ergo radius totius globi vocetur R, radius cavitatis r, maſſa vero ſeu pondus globi excavati M, et illius momentum inertiae μ; erit per (419.)

$$\mu = \tfrac{8}{15}\pi R^5 - \tfrac{8}{15}\pi r^5 : \quad M = \tfrac{4}{3}\pi R^3 - \tfrac{4}{3}\pi r^3.$$

Adeoque etiam

$$\mu = \tfrac{8}{15}\pi (R^5 - r^5) = \tfrac{2}{5} M \frac{R^5 - r^5}{R^3 - r^3}.$$

422. Corollarium 7.

Sit QX arcus parabolae, pro quo erit $y^2 = p x$ (Vol. I. §. 508.); debebit eſſe in (415. §.)

$$\varepsilon m = \pi p x \varepsilon x; \quad \varepsilon \mu = \tfrac{1}{2}\pi p^2 x^2 \varepsilon x:$$

conſequenter fiet

$$m = \tfrac{1}{2}\pi p x^2; \quad \mu = \tfrac{1}{6}\pi p^2 x^3 = \tfrac{1}{3} m . y^2,$$

ubi m denotat pondus ſeu maſſam ſegmenti AQB conoidis parabolici XQZ, et μ illius momentum inertiae reſpectu axeos QC.

423. Corollarium 8.

Pro arcu QA hyperbolae, cujus revolutione circa axem tranſverſum QC generetur conois QADBEA; erit per (Vol. I. §. 550.) $y^2 = \frac{b^2}{a} x + \frac{b^2}{a^2} x^2$: pro maſſa m conoidis QAB, et momento inertiae μ reſpectu axeos QC habebimus ergo per (415. §.)

$$\varepsilon m = \pi\left(\frac{b^2}{a}\,x + \frac{b^2}{a^2}x^2\right)\varepsilon x;\quad \varepsilon\mu = \tfrac{1}{2}\pi\left(\frac{b^2}{a}\,x + \frac{b^2}{a^2}x^2\right)^2\varepsilon x;$$

et integrando inveniemus

$$m = \frac{\pi b^2}{6a^2}(3ax^2 + 2x^3);$$

$$\mu = \frac{\pi b^4}{60a^4}(10a^2x^3 + 15ax^4 + 6x^5).$$

$$\text{ſeu } \mu = \frac{b^2}{10a^2}\,m\,\frac{10a^2x + 15ax^2 + 6x^3}{3a + 2x}.$$

424. Corollarium 9.

Quodſi autem QA ſit arcus ellipſeos, cujus revolutione circa axem transverſum QC generetur ſegmentum AQB $= m$ ſphaeroidis elliptici; erit $y^2 = \frac{b^2}{a}\,x - \frac{b^2}{a^2}x^2$ (Vol. I. §. 525.): pro momento inertiae μ ſegmenti $m =$ AQB reſpectu axeos QC debebit ergo per (415. §.) eſſe

$$\varepsilon m = \pi\left(\frac{b^2}{a}\,x - \frac{b^2}{a^2}x^2\right)\varepsilon x;\quad \varepsilon\mu = \frac{\pi}{2}\left(\frac{b^2}{a}\,x - \frac{b^2}{a^2}x^2\right)^2\varepsilon x;$$

$$m = \frac{\pi b^2}{6a^2}(3ax^2 - 2x^3);$$

$$\mu = \frac{\pi b^4}{60a^4}(10a^2x^3 - 15ax^4 + 6x^5).$$

$$\text{ſeu } \mu = \frac{b^2}{10a^2}\,m\,\frac{10a^2x - 15ax^2 + 6x^3}{3a - 2x}.$$

425. Corollarium 10.

Et pro $x = QC = \frac{1}{2}a$ in (424. §.) prodibit maſſa m, et momentum inertiae μ dimidii ſphaeroidis elliptici XQZ reſpectu axeos transverſi QC, nimirum

$$m = \frac{\pi b^2 a}{12};\quad \mu = \frac{\pi b^4 a}{120} = \tfrac{1}{10}\,m b^2.$$

Hujus duplum dabit maſſam M integri ſphaeroidis et illius momentum inertiae μ reſpectu axeos transverſi, nimirum

$$M = \frac{\pi b^2 a}{6};\quad \mu = \frac{\pi b^4 a}{60} = \tfrac{1}{10}\,M b^2.$$

426. Corollarium 11.

Eodem prorſus modo invenietur momentum inertiae μ ſegmenti $m = AQB$ ſphaeroidis elliptici revolutione arcus QA ellipſeos circa axem conjugatum QC geniti. Hoc enim caſu, pro $x = Qb$, $y = Ab$, erit aequatio ad ellipſim $y^2 = \frac{a^2}{b} x - \frac{a^2}{b^2} x^2$: igitur per (415. §.)

$$\varepsilon m = \pi \left(\frac{a^2}{b} x - \frac{a^2}{b^2} x^2 \right) \varepsilon x; \quad \varepsilon \mu = \frac{\pi}{2} \left(\frac{a^2}{b} x - \frac{a^2}{b^2} x^2 \right)^2 \varepsilon x;$$

$$m = \frac{\pi a^2}{6 b^2} (3 b x^2 - 2 x^3);$$

$$\mu = \frac{\pi a^4}{60 b^4} (10 b^2 x^3 - 15 b x^4 + 6 x^5).$$

$$\text{ſeu } \mu = \frac{a^2}{10 b^2} m \frac{10 b^2 x - 15 b x^2 + 6 x^3}{3b - 2x}.$$

427. Corollarium 12.

Et pro ſemiaxe conjugato $x = QC = \frac{1}{2} b$ obtinebis ex (426. §.) maſſam m et momentum inertiae μ dimidii ſphaeroidis elliptici XQZ revolutione quadrantis QX ellipſeos circa ſemiaxem conjugatum QC geniti, cujus duplum dabit maſſam M et momentum inertiae μ integri ſphaeroidis revolutione ellipſeos circa axem conjugatum geniti reſpectu ejusdem axeos, nimirum

$$M = \frac{\pi a^2 b}{6}; \quad \mu = \frac{\pi a^4 b}{60} = \frac{1}{10} M a^2.$$

428. Corollarium 13.

Centrum gravitatis globi $BPDQ$ (76. Fig.) coincidit cum illius centro magnitudinis C (231. §.): quare, ſi axis mn detur in diſtantia $AC = AB + BC = d + R$ a centro C, pro radio globi $BC = R$, et $BA = d$, cum momentum inertiae globi $BPDQ = M$ reſpectu diametri PQ axi mn parallelae ſit $\frac{8}{15} \pi R^5 = \frac{2}{5} M R^2$ (419. §.); erit illius momentum inertiae μ reſpectu axeos mn per (406. §.) Fig. 76.

$$\mu = \frac{8}{15} \pi R^5 + \frac{4}{3} \pi R^3 (d + R)^2 =$$
$$= \frac{28}{15} \pi R^5 + \frac{4}{3} \pi R^3 (d + 2R) d;$$
$$\text{ſeu } \mu = \frac{1}{5} M (7 R^2 + 10 R d + 5 d^2).$$

Et

Et pro $d = BA = 0$ erit momentum inertiae globi $M = BPDQ$ reſpectu axeos pq illum in B tangentis

$$\mu = \tfrac{28}{15}\pi R^5 = \tfrac{7}{5} M R^2.$$

429. Problema.

Fig. 77. *Invenire momentum inertiae lentis* BPDQ (77. Fig.) *ex duobus ſegmentis ſphaericis* BPD, BQD *compoſitae reſpectu illius axeos minoris* PQ.

Solutio.

1. Sint axes lentis $PQ = 2b$, $BD = 2a$, adeoque ſemiaxes $PC = b$, $BC = a$: cum ſemiaxis BC ſit ordinata circuli maximi ſphaerae, ad quam ſegmenta BPD, BQD pertinent, reſpondens abſciſſae PC, ſi radius ejusdem ſphaerae vocetur R; erit

$$a^2 = 2Rb - b^2; \text{ hinc } R = \frac{a^2 + b^2}{2b}.$$

2. Pro hoc ergo valore radii R, ſi ponas $x = PC = b$ in (418. §.), invenies et maſſam m ſegmenti BPD, et illius momentum inertiae reſpectu axeos PQ, cujus duplum dabit maſſam M totius lentis BPDQ, ejusque momentum inertiae μ reſpectu axeos PQ.

$$M = \tfrac{2}{3}\pi b^2 (3R - b);$$
$$\mu = \tfrac{1}{15}\pi b^3 (20R^2 - 15Rb + 3b^2);$$

conſequenter

$$M = \tfrac{1}{3}\pi (3a^2 b + b^3);$$
$$\mu = \tfrac{1}{30}\pi (10a^4 b + 5a^2 b^3 + b^5) = \tfrac{1}{10} M . \frac{10a^4 + 5a^2 b^2 + b^4}{3a^2 + b^2}.$$

430. Corollarium.

Centrum gravitatis lentis BPDQ ex ſegmentis ſphaericis aequalibus BPD, BQD compoſitae coincidit cum medio puncto C, in quo illius axes $PQ = 2b$, $BD = 2a$ ſeſe biſſecant (229. 154. §.): momentum inertiae ejusdem lentis reſpectu axeos mn paralleli ejus axi minori PQ, et perpendicularis ad axem majorem BD in A productum, erit ergo $= \mu + M . AC^2$, denotante M maſſam lentis, et μ illius momentum inertia reſpectu axeos PQ (406. §.). Quamobrem, ſumto valore pro μ et M ex (429. §.), poſitaque diſtantia $AB = d$, ut ſit $AC = d + a$; erit momentum inertiae lentis reſpectu axeos mn

=

$$= \tfrac{1}{30}\pi(10a^4b+5a^2b^3+b^5)+\tfrac{1}{3}\pi(3a^2b+b^3)(d+a)^2 =$$

$$= \tfrac{1}{10}M\left(10(d+a)^2+\frac{10a^4+5a^2b^2+b^4}{3a^2+b^2}\right).$$

Hinc, ſi fiat $d = AB = o$, obtinebitur momentum inertiae lentis BPDQ reſpectu axeos pq in vertice ejus B paralleli axi minori PQ et perpendicularis ad axem majorem BD, nimirum =

$$\tfrac{1}{30}\pi(40a^4b+15a^2b^2+b^5) =$$

$$= \tfrac{1}{10}M.\frac{40a^4+15a^2b^2+b^4}{3a^2+b^2}.$$

431. Problema.

Inveſtigare momentum inertiae dati corporis ADC (30. Fig.) *reſpectu plani* MN *poſitione dati.* Fig. 30.

Solutio.

1. Sit PQ perpendicularis ad planum MN, ſumtaque ejus parte variabili $x = Qb$ cogitetur per b tranſire planum br parallelum plano MN, quod ex toto corpore ADC abſcindat partem $rsCD = m$, cujus momentum inertiae reſpectu plani MN vocetur mk^2.

2. Si variabilis $x = Qb$ creſcat differentia $\Delta x = ba$, creſcet functio m aequalis maſſae rsCD differentia Δm aequali maſſae rsqp inter plana br, ap parallela interceptae, et momentum inertiae mk^2 maſſae m creſcet differentia Δmk^2 aequali momento inertiae maſſae $\Delta m = pqsr$ reſpectu plani MN per (401. §.). Cum jam $x = Qb$ ſit minima, et $x+\Delta x = Qa$ maxima inter diſtantias omnium minimarum particularum maſſam $\Delta m = pqsr$ conſtituentium a plano MN; erit per (404. §.)

$$\Delta mk^2 > \Delta m.x^2 \text{ et } \Delta mk^2 < \Delta m(x+\Delta x)^2;$$

$$\text{ſeu } \Delta mk^2 > \Delta m.x^2 \text{ et } \Delta mk^2 < \Delta m.x^2+\Delta m(2x\Delta x+\Delta x^2).$$

3. Quidquid vero eſt functio m variabilis x, dari debent certi coefficientes f, g, h, etc. independentes a Δx, pro quibus fieret $\Delta m = \frac{\varepsilon m}{\varepsilon x}\Delta x + f\Delta x^2 + g\Delta x^3 +$ etc. (Vol. I. §. 84): in (2) erit ergo pro qualibet cogitabili differentia $\Delta x = ba$

$$\frac{\Delta m k^2}{\Delta x} > \frac{x^2 \varepsilon m}{\varepsilon x} + f x^2 \Delta x + g x^2 \Delta x^2 + \text{etc.};$$

$$\frac{\Delta m k^2}{\Delta x} < \frac{x^2 \varepsilon m}{\varepsilon x} + f x^2 \Delta x + g x^2 \Delta x^2 + \text{etc.} + \left(\frac{\varepsilon m}{\varepsilon x} + f \Delta x + g \Delta x^2 + \text{etc.}\right)(2 x \Delta x + \Delta x^2).$$

4. Hinc (3) per (Vol. I. §. 131.) invenietur exponens rationis differentjalis momenti inertiae $m k^2$ maſſae $m = r \varepsilon CD$ reſpectu plani MN, nimirum $\varepsilon m k^2 = x^2 \varepsilon m$.

5. Quamobrem, ſi exponens εm rationis differentialis maſſae $m = r \varepsilon CD$ pendentis a variabili $x = Qb$ fuerit per x et εx determinabilis; poterit quoque ope calculi integralis determinari momentum inertiae $m k^2$ ejusdem maſſae reſpectu plani MN; et hinc invenietur porro momentum inertiae totius maſſae ADC pro illo valore variabilis x, pro quo maſſa indeterminata $m = r \varepsilon CD$ in ADC abiverit.

432. Corollarium 1.

Inveſtigatio haec momenti inertiae dati corporis reſpectu plani poſitione dati ſerviet in multis caſibus ad eo facilius inveniendum momentum inertiae ejusdem corporis reſpectu dati axeos: ſi enim concipiantur duo plana ſeſe ſub angulo recto interſecantia, ita ut communis illorum interſectio coincidat cum dato axe, tum quaerantur per (431. §.) momenta inertiae corporis reſpectu utriusque plani; erit ſumma momentorum aequalis momento inertiae ejusdem corporis reſpectu dati axeos (403. §.).

433. Corollarium 2.

Fig. 78. Exemplo ſit cylinder rectus (78. Fig.) axeos $ch = a$ et radii $cd = R$. Sit enim $ABDC$ planum tranſiens per centra c, h baſium, in quo axis ch jaceat, et radius cd ſit ad AB perpendicularis: ſi in hoc capiatur $cg = x$ et per g ducatur planum $abfe$ parallelum plano $ABDC$; erit maſſa $ABbaeCDf = m$ certa functio variabilis x, pro cujus momento inertiae μ reſpectu plani $ABDC$ debebit eſſe $\varepsilon \mu = x^2 \varepsilon m$ (431. §.). Cum autem ſit $m = 2a . Acga$, hinc $\varepsilon m = 2a \varepsilon Acga = 2a . y \varepsilon x$ pro $ag = y$ (Vol. I. §. 488.); habebimus

$$\varepsilon \mu = 2 a x^2 y \varepsilon x = 2 a x^2 \varepsilon x \sqrt{(R^2 - x^2)},$$

Hinc

Hinc integrando per (Vol. I. §. 289. 308.) prodibit

$$\mu = -\frac{ax}{2}\sqrt{(R^2-x^2)^3} + \frac{axR^2}{4}\sqrt{(R^2-x^2)} + \frac{aR^4}{4}\text{ Arc Sin }\frac{x}{R}.$$

Pro $x = cd = R$ erit ergo $\mu = \frac{aR^4}{4}$ Arc Sin $1 = \frac{1}{8} a\pi R^4$ momentum inertiae dimidii cylindri reſpectu plani ABDC, et $2\mu = \frac{1}{4} a\pi R^4$ momentum integri cylindri reſpectu cujusvis plani ABDC traſeuntis per centra baſium c, h: momentum inertiae integri cylindri reſpectu illius axeos ch aequale ſummae momentorum ejusdem cylindri reſpectu duorum planorum ad invicem perpendicularium per centra c, h tranſeuntium (432. §.) erit itaque $= \frac{1}{4} a\pi R^4 + \frac{1}{4} a\pi R^4 = \frac{1}{2} a\pi R^4$ ut in (412. §.).

434. Corollarium 3.

Petatur momentum inertiae μ corporis ABZX (59. Fig.) revolutione plani AbCX ad b, C rectanguli circa axem QC geniti reſpectu axeos MN jacentis in plano ad QC in Q perpendiculari, dato illius momento inertiae Z reſpectu axeos QC. Si per (431. §.) quaeratur momentum inertiae X corporis XABZ reſpectu plani in Q ad QC perpendicularis; erit $\mu = X + \frac{1}{2}Z$. Fig. 59.

Quodlibet enim planum, in quo axis QC jaceat, dividet corpus ABZX in duas partes ſimiles et aequales, ita ut momenta inertiae reſpectu omnium ejusmodi planorum inter ſe aequalia ſint futura (398. §.): quodſi ergo cogitentur duo plana ſeſe in QC ſub angulo recto interſecantia, et Y ſit momentum inertiae corporis ABZX reſpectu unius talis plani; erit $Z = Y + Y = 2Y$ momentum inertiae ejusdem corporis reſpectu axeos QC (403. §.); adeoque $Y = \frac{1}{2}Z$. Sed ſi unum planum, in quo QC jacet, concipiatur eſſe perpendiculare plano, in quo jacet axis MN, ita ut MN ſit communis interſectio horum planorum; erit eo ipſo $\mu = X + Y$ (403. §.), conſequenter $\mu = X + \frac{1}{2}Z$.

435. Corollarium 4.

Sit inveniendum momentum inertiae μ cylindri recti (78. Fig.) ARSEDC reſpectu axeos AB cum diametro baſeos coincidentis. Pro radio $cA = R$, axe $ch = a$, $cu = x$, ſi per u tranſeat ſectio sr parallela baſi ARS, fiat maſſa $ARSrs = m$, et illius momentum inertiae reſpectu plani ARS ſit X; erit Fig. 78.

m =

$m = \pi R^2 x$; $\varepsilon m = \pi R^2 \varepsilon x$: igitur (431. §.)

$$\varepsilon X = x^2 \varepsilon m = \pi R^2 x^2 \varepsilon x; \quad X = \tfrac{1}{3}\pi R^2 x^3.$$

Quamobrem pro $x = ch = a$ invenietur $X = \frac{1}{3}\pi R^2 a^3$ momentum inertiae totius cylindri RSEDC reſpectu plani ARS: cum ergo $Z = \frac{1}{2}\pi a R^4$ ſit illius momentum reſpectu axeos ch (412. §.); erit momentum inertiae reſpectu axeos AB per (434. §.) $\mu = X + \frac{1}{2}Z = \frac{1}{3}\pi R^2 a^3 + \frac{1}{4}\pi a R^4$, $= \frac{1}{12} M(4a^2 + 3R^2)$, denotante M maſſam cylindri.

436. Corollarium 5.

Fig. 56. Quaeratur momentum inertiae μ coni recti ABD (56. Fig.) reſpectu axeos MN jacentis in plano ad axem coni $AC = a$ perpendiculari, dato tam hoc axe, quam radio baſeos $BC = R$. Pro $x = Ac$, ducta per c ſectione cq parallela baſi, ſit X momentum inertiae maſſae $m = Apq$ reſpectu plani MN, adeoque $\varepsilon X = x^2 \varepsilon m$ (431. §.). Cum area baſeos ſit $= \pi R^2$, hinc area ſectionis $pq : \pi R^2 = x^2 : a^2$; erit $pq = \frac{\pi R^2}{a^2} x^2$; $m = \frac{\pi R^2}{3a^2} x^2$, hinc $\varepsilon m = \frac{\pi R^2}{a^2} x^2 \varepsilon x$. Quare habebimus

$$\varepsilon X = \frac{\pi R^2}{a^2} x^4 \varepsilon x; \quad X = \frac{\pi R^2}{5a^2} x^5.$$

Pro $x = AC = a$ fiet itaque $X = \frac{1}{5}\pi R^2 a^3$ momentum inertiae totius coni ABD reſpectu plani MN. Eſt autem $Z = \frac{\pi R^4 a}{10}$ illius momentum reſpectu axeos AC (416. §.): momentum reſpectu axeos MN debet ergo per (434. §.) eſſe $\mu = X + \frac{1}{2}Z = \frac{1}{5}\pi R^2 a^3 + \frac{1}{20}\pi R^4 a = \frac{3}{20} M(4a^2 + R^2)$, exprimente M maſſam coni.

437. Corollarium 6.

Fig. 59. Quidquid demum ſit corpus QADBEA (59. Fig.) revolutione plani QAb ad b rectanguli circa axem $Qb = x$ geniti, ſi $y = Ab$ ſit ordinata curvae QA reſpondens abſciſſae $x = Qb$, et X deſignet momentum inertiae corporis $QAB = m$ reſpectu plani in Q ad Qb perpendicularis, μ vero exprimat illius momentum reſpectu axeos MN per Q in eodem plano excurrentis, et Z denotet illius momentum reſpectu axeos Qb; erit

$$\varepsilon X = x^2 \varepsilon m \text{ (431. §.)} = \pi x^2 y^2 \varepsilon x \text{ (Vol. I. § 490.)};$$

$$\varepsilon Z = \tfrac{1}{2}\pi y^4 \varepsilon x \text{ (415. §.)}; \quad \varepsilon\mu = \varepsilon X + \tfrac{1}{2}\varepsilon Z \text{ (434. §.)};$$

igitur

igitur habebimus

$$\varepsilon\mu = \pi x^2 y^2 \varepsilon x + \tfrac{1}{4}\pi y^4 \varepsilon x = \frac{\pi}{4}(4x^2y^2 + y^4)\varepsilon x.$$

Data itaque aequatione ad curvam QA inter ejus coordinatas orthogonas y, x, licebit ope calculi integralis ex hac expreſſione momentum inertiae μ corporis AQB reſpectu axeos MN ad Qb perpendicularis immediate elicere.

438. Corollarium 7.

Sit QA arcus circuli, qui circa axem Qb revolutus generet ſegmentum ſphaericum AQB = M; erit $y^2 = 2Rx - x^2$: pro momento inertiae μ ſegmenti ſphaerici M = AQB reſpectu axeos MN illud in vertice Q tangentis erit ergo per (437. §.)

$$\varepsilon\mu = \frac{\pi}{4}(4x^2(2Rx - x^2) + (2Rx - x^2)^2)\varepsilon x$$

$$= \frac{\pi}{4}(4Rx^3 - 3x^4 + 4R^2x^2)\varepsilon x.$$

igitur erit

$$\mu = \frac{\pi}{4}(Rx^4 - \tfrac{3}{5}x^5 + \tfrac{4}{3}R^2x^3) = \tfrac{1}{60}\pi x^3(15Rx - 9x^2 + 20R^2);$$

ſeu pro maſſa AQB = M,

$$\mu = \tfrac{1}{60}\pi x^3(15Rx + 20R^2 - 9x^2) = \tfrac{1}{20}M\frac{15Rx^2 + 20R^2x - 9x^3}{3R - x}.$$

Ex hac porro expreſſione momenti inertiae ſegmenti ſphaerici AQB reſpectu axeos MN invenies pro x = R vel x = 2R momentum inertiae dimidii vel integri globi reſpectu axeos MN illum in vertice Q tangentis: nimirum momentum inertiae dimidii globi, denotante M illius maſſam, erit

$$= \tfrac{13}{30}\pi R^5 = \tfrac{13}{20}MR^2;$$

et momentum inertiae integri globi, denotante M ejus maſſam, fiet, ut in (428. §.)

$$= \tfrac{28}{15}\pi R^5 = \tfrac{7}{5}MR^2.$$

439. Corollarium 8.

Pro ſegmento m = QAEBDA conoidis parabolici revolutione arcus parabolae QA circa ejus axem QC genito, et illius momento inertiae μ reſpectu axeos MN illud in vertice Q tangentis, debebit eſſe $y^2 = px$;

 igitur

$$\text{igitur } \partial\mu = \frac{\pi}{4}(4px^3 + p^2x^2)\partial x;$$

$$\text{hinc } \mu = \frac{\pi}{4}(px^4 + \tfrac{1}{3}p^2x^2); \quad \text{ſeu ob } m = \tfrac{1}{2}\pi p x^2,$$

$$\mu = \frac{\pi p x^2}{12}(3x^2 + p^2) = \tfrac{1}{6}m(3x^2 + p^2).$$

440. Corollarium 9.

Pro ſegmento $m = AQB$ ſphaeroidis elliptici revolutione arcus ellipſeos QA circa axem transverſum QC genito, cujus momentum inertiae reſpectu axeos MN illud in vertice Q tangentis ſit μ, erit

$$y^2 = \frac{b^2}{a}x - \frac{b^2}{a^2}x^2; \quad \text{igitur per (437. §.)}$$

$$\partial\mu = \frac{\pi b^2}{4a^4}\partial x((4a^3 - 2ab^2)x^3 - (4a^2 - b^2)x^4 + a^2b^2x^2).$$

Adeoque debebit eſſe

$$\mu = \frac{\pi b^2}{120\,a^4}((30a^3 - 15ab^2)x^4 - (24a^2 - 6b^2)x^5 + 10a^2b^2x^3);$$

$$\text{ſeu ob } m = \frac{\pi b^2}{6a^2}(3ax^2 - 2x^3)$$

$$\mu = \tfrac{1}{20}m \cdot \frac{(30a^3 - 15ab^2)x^2 - (24a^2 - 6b^2)x^3 + 10a^2b^2x}{a^2(3a - 2x)}.$$

Hinc pro $x = \frac{1}{2}a$ invenies momentum inertiae dimidii ſphaeroidis elliptici revolutione quadrantis ellipſeos circa ſemiaxem transverſum geniti reſpectu axeos MN ſphaeroidem in vertice Q tangentis, ſi M ſit maſſa dimidii ſphaeroidis,

$$\mu = \frac{\pi a b^2}{8 \cdot 120}(9a^2 + 4b^2) = \tfrac{1}{80}M(9a^2 + 4b^2).$$

Et pro $x = a$ reperies momentum inertiae integri ſphaeroidis elliptici revolutione ellipſeos circa axem transverſum geniti reſpectu axeos ſphaeroidem in vertice axeos transverſi tangentis, denotante M illius maſſam

$$\mu = \frac{\pi a b^2}{120}(6a^2 + b^2) = \tfrac{1}{20}M(6a^2 + b^2).$$

441. Problema.

Fig. 79. *Invenire momentum inertiae priſmatis triangularis recti* ABCFED (79. Fig.) *baſium ad* C, F *rectangularum reſpectu lateris* AD.

Solutio.

Solutio.

1. Sit latus priſmatis $AD = l$, et latera baſium angulos rectos comprehendentia ſint $AC = DF = a$, $CB = FE = b$; erit maſſa priſmatis (411. §. Schol.) $M = \frac{1}{2} abl$.

2. Ducto plano $aADd$ perpendiculari ad $ACFD$; erit communis interſectio horum planorum ipſe axis AD reſpectu cujus debet determinari momentum inertiae totius priſmatis: aequabitur ergo illud ſummae momentorum inertiae dati priſmatis reſpectu planorum $aADd$, $ACFD$ (404. §.).

3. Quare ſumatur $Ce = x$, et per e ducatur ſectio $eohi$ parallela plano $ACFD$: pro maſſa $m = ACFDhieo$, et illius momento inertiae μ reſpectu plani $ACFD$ habebimus $d\mu = x^2 dm$ (431. §.).

$$\text{Sed } oe = \frac{AC.Be}{BC} = a - \frac{a}{b}x;$$

conſequenter

$$ACeo = \tfrac{1}{2}(AC + oe)Ce = ax - \frac{a}{2b}x^2;$$

$$m = ACeo.AD = axl - \frac{al}{ab}x^2:$$

Debet itaque poni

$$dm = \frac{al}{b}(b - x)dx; \quad dm = \frac{al}{b}(bx^2 - x^3)dx.$$

Quamobrem erit

$$\mu = \frac{al}{b}\left(\tfrac{1}{3}bx^3 - \tfrac{1}{4}x^4\right) = \frac{alx^3}{12b}(4b - 3x).$$

4. Pro $x = BC = b$ in (3) obtinebimus ergo momentum inertiae totius priſmatis reſpectu plani AF, $= \frac{1}{12} alb^3$.

5. Porro capiatur $Af = x$, ductoque per f plano $fohg$ parallelo ad $aADd$, ponatur maſſa $AfohgD = m$, et μ ſit illius momentum inertiae reſpectu plani $aADd$; erit per (431. §.) $d\mu = x^2 dm$.

$$\text{Sed eſt } fo = \frac{b}{a}x, \text{ hinc } Afo = \frac{b}{2a}x^2;$$

$$m = Afo.AD = \frac{bl}{2a}x^2: \text{ igitur fiet}$$

$$\varepsilon m = \frac{bl}{a} x \varepsilon x; \quad \text{hinc } \varepsilon \mu = \frac{bl}{a} x^3 \varepsilon x.$$

Quare debebit eſſe $\mu = \frac{bl}{4a} x^4$.

6. Poſita variabili $x = AC = a$ in (5) inveniemus ergo momentum inertiae totius priſmatis ABCFED reſpectu plani aADd, $= \frac{1}{4} bla^3$.

7. Ex his (4) (6) per ſe jam ob (2) fluit momentum inertiae μ dati priſmatis reſpectu lateris AD, nimirum

$$\mu = \tfrac{1}{12} alb^3 + \tfrac{1}{4} bla^3 = \tfrac{1}{12} abl(3a^2 + b^2)$$
$$= \tfrac{1}{12} M(3a^2 + b^2) \text{ ob } (1).$$

442. Corollarium 1.

Fig. 80. Momentum inertiae μ priſmatis triangularis recti ABCDEF (80. Fig.) reſpectu axeos AF, ſi uterque angulus baſeos ad B, C ſit acutus, aequabitur ſummae momentorum priſmatum ACpqDF, ABpqEF baſium ad p, q rectangularium, in quae illud plano ApqF ad CBED perpendiculari poteſt dividi (399. §.): quare, cum pro $Ap = a$, $Bp = b$, $Cp = c$, $AF = l$ per (441. §.) debeat eſſe

Mom. ABpqEF $= \tfrac{1}{12} abl(3a^2 + b^2)$;
Mom. ACpqDF $= \tfrac{1}{12} acl(3a^2 + c^2)$:

Fiet eo ipſo

$$\mu = \tfrac{1}{12} abl(3a^2 + b^2) + \tfrac{1}{12} acl(3a^2 + c^2);$$

hinc, ob priſmatis maſſam $M = \tfrac{1}{2} al(b + c)$, erit

$$\mu = \tfrac{1}{12} al(b^3 + c^3 + 3a^2(b + c)) = \tfrac{1}{6} M(3a^2 + b^2 + c^2 - bc).$$

443. Corollarium 2.

Fig. 81. Si autem unus angulus baſeos ABC priſmatis triangularis recti ABCDEF, puta angulus ad C (81. Fig.) ſit obtuſus, et planum ApqF ad BCDE perpendiculare; erit momentum inertiae priſmatis ABCDEF reſpectu axeos AF aequale differentiae momentorum priſmatum ABpqEF, ACpqDF (400. §.): cum ergo ſit pro $Ap = a$, $Bp = b$, $Cp = c$, et $AF = l$ per (441. §.)

Mom. ApqEF $= \tfrac{1}{12} abl(3a^2 + b^2)$;
Mom. ACpqDF $= \tfrac{1}{12} acl(3a^2 + c^2)$;

erit momentum μ priſmatis ABCDEF reſpectu axeos AF

$$\mu = \tfrac{1}{12} abl(3a^2 + b^2) - \tfrac{1}{12} acl(3a^2 + c^2);$$

adeo-

adeoque ob illius maſſam $\frac{1}{2}al(b+c)=M$

$$\mu=\tfrac{1}{12}al(b^3-c^3+3a^2(b-c))=\tfrac{1}{6}M(3a^2+b^2+c^2+bc).$$

444. Corollarium 3.

Si baſis ABC (80. Fig.) priſmatis ſit aequicrura angulorum ad C, B aequalium; erit $b=c=\frac{1}{2}BC$, et $a=\frac{1}{2}\sqrt{(4AB^2-BC^2)}$ in (442. §.): pro $AB=AC=\alpha$; et $BC=\beta$, $AF=l$ erit ergo momentum inertiae μ priſmatis ABCDEF reſpectu axeos AF Fig. 80.

$$\mu=\tfrac{1}{12}\left(\frac{\beta^3}{8}+\frac{\beta^3}{8}+\beta\,.\,\tfrac{3}{4}(4\alpha^2-\beta^2)\right)\frac{l}{2}\sqrt{(4\alpha^2-\beta^2)};$$

$$\text{ſeu }\mu=\frac{\beta l}{48}(6\alpha^2-\beta^2)\sqrt{(4\alpha^2-\beta^2)}=\tfrac{1}{12}M(6\alpha^2-\beta^2).$$

445. Corollarium 4.

Momentum autem inertiae priſmatis triangularis recti regularis baſeos aequilaterae reſpectu axeos AF erit pro $\alpha=\beta=AB=BC=CA$, et $AF=l$ per (444. §.)

$$\mu=\tfrac{5}{48}\alpha^4 l\sqrt{3}=\tfrac{5}{12}M\alpha^2.$$

446. Corollarium 5.

Momentum inertiae cujuslibet priſmatis recti regularis (49. Fig.) reſpectu illius axeos PQ, datis latere baſeos $AB=\beta$, radio $PA=\alpha$, axe $PQ=l$, et numero n laterum AB, BC, CD, etc., invenietur, ſi capiatur momentum inertiae priſmatis triangularis APBbaQ per (444. §.), illudque multiplicetur per numerum n talium priſmatum datum priſma conſtituentium (399. §.): ea propter, ſi M denotet maſſam totius priſmatis ABCDEedcba, erit illius momentum inertiae reſpectu axeos PQ Fig. 49.

$$\mu=\tfrac{n}{48}\beta l(6\alpha^2-\beta^2)\sqrt{(4\alpha^2-\beta^2)}=\tfrac{1}{12}M(6\alpha^2-\beta^2).$$

447. Corollarium 6.

Momentum inertiae cujuslibet parallelepipedi ABCFGHDE (82. Fig.) reſpectu axeos MN coincidentis cum ejus latere ED invenies, ſi illud in duo priſmata triangularia FGEDHA, FCEDBA mente reſolvas; horum momenta inertiae reſpectu axeos MN per (441. 442. 443. §.) quaeras; tum in unam ſummam colligas (399. §.). Fig. 82.

448. Corollarium 7.

In ſpecie ergo, ſi ABCFGHDE $= M$ ſit parallelepipedum rectangulum, et GE $= l$, CE $= a$, ED $= b$; erit illius maſſa $M = abl$, et momentum inertiae reſpectu axeos MN per (447. 441. §.)

$$\mu = \tfrac{1}{12} GE.GF.ED(3GE^2 + GF^2) + \tfrac{1}{12} EC.FC.ED(3EC^2 + FC^2),$$

ſeu $\mu = \tfrac{1}{3} abl(a^2 + l^2) = \tfrac{1}{3} M(a^2 + l^2)$.

449. Corollarium 8.

Si $a =$ CE, et $b =$ ED continuo decreſcat, tum prope evaneſcat; abibit parallelepipedum in virgam tenuiſſimam GE $= l$, cujus momentum inertiae reſpectu axeos MN ad illam perpendicularis poterit poni $= \tfrac{1}{3} Ml^2 = \tfrac{1}{3} l^3$ (448. §.).

450. Corollarium 9.

Si vero tantum $a =$ CE decreſcat et prope evaneſcat; debebit parallelepipedum rectangulum abire in laminam tenuiſſimam pariter rectangulam GHDE, cujus momentum inertiae reſpectu axeos MN, pro EG $= l$, ED $= b$, poterit poni $= \tfrac{1}{3} Ml^2 = \tfrac{1}{3} bl^3$ (448. §.).

451. Corollarium 10.

Si denique $b =$ ED adeo parvi valoris ſit, ut prope evaneſcat; parallelepipedum rectangulum abibit in laminam tenuiſſimam rectangulam FCEG, cujus momentum inertiae reſpectu axeos MN ad illlam perpendicularis poterit poni $= \tfrac{1}{3} M(a^2 + l^2) = \tfrac{1}{3} al(a^2 + l^2)$ pro $a =$ CE, $l =$ GE (448. §.).

452. Corollarium 11.

In cubo AFED erit GE $=$ CE $=$ ED $= l = a = b$: momentum inertiae cubi AFED reſpectu axeos MN erit ergo $\tfrac{1}{3} a^3(a^2 + a^2) = \tfrac{2}{3} a^5 = \tfrac{2}{3} Ma^2$ (448. §.).

DISSERTATIO XII.

DE
MOTU MASSARUM CIRCA AXES FIXOS.

453. Definitio.

Si corpus rigidum Z (60. §.) circa lineam rectam R poſitione datam ſic moveatur, ut haec durante motu eundem perpetuo ſitum reſpectu omnium punctorum corporis Z retineat; erit ejus motus *gyratorius*, et recta R *Axis gyrationis*, et quidem *fixus* (qualis in ſequentibus diſquiſitionibus ubique ſubintelligetur), ſi is perfecte quieſcat, nullisque viribus cedat.

454. Corollarium 1.

Singula puncta a, A (83. Fig.) corporis in motu gyratorio circa datum axem MN conſtituti easdem perpetuo ſervant diſtantias af, AF ab axe gyrationis MN (453. §.). Fig. 83.

455. Corollarium 2.

In motu igitur gyratorio debent ſingula puncta a, A corporis deſcribere peripherias circulorum abc, ABC ad axem gyrationis MN perpendicularium, centraque f, F in illo habentium, quorum radii af, AF aequantur perpendiculis ex punctis a, A ad eundem axem demiſſis (454. §.).

456. Corollarium 3.

Cum autem durante motu gyratorio corporis circa datum axem MN ſingula ejus puncta tam ab axe MN (454. §.), quam inter ſe easdem perpetuo diſtantias ſervent (453. 60. §.); evidens eſt, ſingula puncta a, A quovis tempore t per arcus ſimiles ad, AD promoveri, interceptos inter crura af, df et AF, DF angulorum aequalium afd, AFD, quos perpendicula af, AF ex iisdem punctis ad axem MN ducta intra idem tempus debent percurrere.

457. Definitio.

Si recta af perpendicularis ad axem gyrationis MN circa hunc axem in circulo acb moveatur, debebit illa quovis tempusculo t per certum angulum afd promoveri independentem a longitudine ejusdem rectae: quamobrem licebit rectae af et cuivis ejus puncto a, α ejusmodi celeritatem tribuere, per quam ea ad certum angulum afd certo tempore percurrendum determinetur (257. §.); atque haec deinceps nomine *Celeritatis angularis* rectae af et cujuslibet ejus puncti debebit intelligi.

458. Corollarium 1.

Spatia, quae celeritatibus angularibus percurri ſupponuntur, ſunt totidem anguli, non autem lineae ut in (252. §.): ſemper vero illae et hi anguli debent inſtar quantorum heterogeneorum concipi, quorum unum alteri aequari nequeat (456. §.).

Scholion.

Contra rei naturam loquuntur idcirco, qui celeritatem angularem in ipſa illius definitione certo angulo ponunt aequalem: in (264. §.) expoſui, quo ſenſu celeritas puncti in linea recta vel curva incedentis per certum ſpatiolum poſſit exprimi; mox vero declarabo, quo ſenſu celeritatem quoque angularem certo angulo vel arcui aequare liceat. *Eulerus*, in *Theoria motus corporum ſolidorum ſeu rigidorum*, celeritatem angularem in motu gyratorio vocat celeritatem puncti, cujus diſtantia ab axe gyrationis unitate exprimitur: is ergo dat definitionem celeritatis angularis obſcuriorem ſuo definito, aſſumens in ipſa definitione, quod ex genuina notione celeritatis angularis demonſtrandum eſſet.

459. Corollarium 2.

Motus rectae af circa datum axem MN erit *uniformis* ſeu aequabilis, ſi illa ſingulis tempuſculis aequalibus per aequales angulos promoveatur, proinde eadem perpetuo celeritate angulari circa MN volvatur (458. 457. 254. §.).

460. Corollarium 3.

Fig. 83. 84. Quodſi ergo duae rectae af, su (83. 84. Fig.) ad axes fixos MN, mn perpendiculares motu uniformi incedant in circulis acb, pqr; erunt anguli afd, sur, quos illae intra idem tempus percurrerint, inter ſe ut celeritates angulares earundem rectarum (459. 458. 260. §.).

461. Corollarium 4.

Anguli vero afd, afe, quos recta af, determinata celeritate angulari motu uniformi circa axem MN in circulo acb incedens, intra diverſa tempora percurrerit, et anguli afd, sur, quos duae rectae af, su, aequalibus celeritatibus angularibus in circulis acb, pqr circa diverſos axes MN, mn motu uniformi incedentes, diverſis temporibus confecerint, erunt inter ſe in ratione directa reſpectivorum temporum (259. 258. 261. §.

462. Corollarium 5.

Quo motus ejusmodi ad calculum poſſit revocari, congruae menſurae celeritatum angularium, ſpatiorum (458. §.), et temporum conſtituantur oportet. Retento minuto ſecundo pro menſura temporum (262. §. 2. n.), ſumatur, ob (458. et 262. §. 1. n.), pro menſura ſpatiorum angulus aequali angulo δ, inter cujus latera intercipiatur arcus ex ejus vertice radio $=1$ deſcriptus et eidem radio aequalis (Vol. I. §. 5. Schol. 3. n. 2.).

463. Corollarium 6.

Hinc licebit pro menſura cujuslibet celeritatis angularis γ, qua in motu uniformi (459. §.) angulus A quovis minuto ſecundo percurratur, eam determinatam celeritatem angularem α accipere, qua motu pariter uniformi quovis minuto ſecundo angulus δ ſumtus pro menſura angulorum A (462. §.) debeat percurri (262. §. n. 1. 4.).

464. Corollarium 7.

In (463. §.) erit ergo $A:\delta=\gamma:\alpha$ per (461. §.): igitur $\frac{A}{\delta}=\frac{\gamma}{\alpha}$, id eſt: exponens rationis anguli A quovis minuto ſecundo celeritate angulari γ percurſi ad angulum δ pro ejus menſura acceptum aequatur exponenti rationis ipſius celeritatis angularis γ ad celeritatem angularem α pro illius menſura acceptam (463. §.). Quodſi ergo ejusmodi exponentes per A et γ deinceps exprimantur; poterit poni $\gamma=A$, atque hoc unico ſenſu, improprio ut patet, licebit celeritatem angularem γ in motu uniformi (459. §.) aequare angulo A, qui eadem celeritate quovis minuto ſecundo percurritur (264. §.).

465. Corollarium 8.

Verum, ſi φ denotet arcum radio $= 1$ ex vertice anguli A inter ejus crura deſcriptum, aequabitur φ exponenti rationis anguli A ad angulum δ pro illius menſura acceptum (462. §.) et (Vol. I. §. 5. Schol. 3. n. 2.): hoc ergo exponente expreſſo per A poterit poni $A = \varphi$, hinc etiam $\gamma = \varphi$ (464. §.). Eodem itaque ſenſu, quo celeritatem angularem γ in quovis motu uniformi (459. §.) angulo A aequare licuit, qui eadem celeritate quovis minuto ſecundo percurritur (464. §.), poterit illa aequari etiam arcui φ, qui ex vertice ejusdem anguli radio $= 1$ inter ipſius crura deſcriptus poteſt cogitari.

466. Corollarium 9.

Fig. 83. Per haec jam poterit motus uniformis rectarum circa datos axes (459. §.) eadem prorſus ratione, qua motus uniformis punctorum in lineis incedentium (265. 266. 267. §.), determinari. Si enim recta af motu ejusmodi in circulo abc circa axem MN volvatur celeritate angulari C, angulumque $S = afd$ quocumque tempore T percurrat; debebit illa quovis minuto ſecundo percurrere angulum $A : S = 1'' : T$ (461. §.): erit ergo $\frac{A}{\delta} : \frac{S}{\delta} = 1 : \frac{T}{1''}$ denotante δ menſuram angulorum A, S (462. §.), ſeu $\frac{C}{\alpha} : \frac{S}{\delta} = 1 : \frac{T}{1''}$ (464. §.), unde, ſi per C, S, T intelligantur exponentes rationum celeritatis C, ſpatii S, et temporis T ad menſuras α, δ, $1''$ (462. 463. §.), neceſſario ſequitur $C : S = 1 : T$, hinc $S = CT$, $C = \frac{S}{T}$, $T = \frac{S}{C}$.

467. Corollarium 10.

Hactenus motum gyratorium uniformem rectarum circa datos axes conſideravimus (459. §.). *Diſformis* ſeu *inaequabilis* erit ejusmodi motus cujusvis rectae, ſi celeritas angularis illo durante non maneat perpetuo eadem (457. §.), ſed continuo mutetur (268. §.). In tali motu habebit ergo recta af quovis momento aliam celeritatem: celeritas angularis, quam illa in fine certi temporis T ab initio motus computati habuerit, erit ejus *celeritas tempori* T *debita* aeſtimanda ex angulo, quem eadem recta quovis minuto ſecundo tali celeritate percurreret, ſi ejus motus eſſet uniformis,

mis, vel ex arcu radio = 1 ex vertice ejusdem anguli inter ejus crura deſcripto (271. 464. 465. §.).

468. Corollarium II.

Quocunque autem tempore duret motus gyratorius dati corporis circa datum axem MN; neceſſe eſt, ut omnia illius puncta eadem celeritate angulari circa axem MN volvantur (456. 457. §.): cenſebitur ergo totum corpus quovis momento determinatam habere celeritatem angularem, nimirum illam, quam ſingula ejus puncta eodem momento habuerint; motus autem ipſius gyratorius uniformis erit vel difformis, prout perpendicula ex ſingulis ejus punctis ad axem gyrationis demiſſa motu uniformi vel difformi (459. 467. §.) circa eundem axem fuerint mota.

469. Definitio.

Eodem tempore, quo in motu gyratorio dati corporis circa datum axem MN (453. §.) perpendiculum af ex quocunque ejus puncto a ad axem MN demiſſum per certum angulum afd promovetur, percurritur ab ipſo puncto a arcus ad circuli acb: celeritas puncti a, qua ejusmodi arcus percurritur (257. §.) vocabitur deinceps *Celeritas linearis* ſeu *vera* puncti a, quo illa ab ejus perpendiculique af celeritate angulari (457. §.) diſtinguatur.

470. Corollarium 1.

Vera ſeu linearis celeritas cujuslibet puncti a corporis in motu gyratorio circa datum axem MN conſtituti aeſtimabitur ex arcu circulari, quem illud eadem celeritate motu uniformi circa axem MN percurreret (469. 264. 271. §.).

471. Corollarium 2.

Sunt autem arcus ad, AD a quibuslibet duobus punctis a, A corporis circa axem MN motu gyratorio incedentis quovis tempore percurſi inter ſe ſimiles (456. §.), adeoque inter ſe in ratione diſtantiarum perpendicularium af, AF eorundem punctorum ab axe MN: in motu gyratorio corporis circa datum axem MN ſunt ergo verae ſeu lineares celeritates ſingulorum ejus punctorum quovis momento inter ſe ut perpendicula ex iisdem punctis ad axem MN demiſſa (470. §.).

472. Co-

472. Corollarium 3.

Quamobrem debebunt eſſe celeritates lineares omnium punctorum corporis in motu gyratorio circa axem MN conſtituti inter ſe aequales, ſi illa aequaliter diſtent ab axe MN; puncta vero inaequaliter diſtantia ab axe MN inaequales habebunt celeritates, majores magis, et minores minus diſtantia (471. §.).

473. Corollarium 4.

Cognita unici puncti a corporis circa axem MN moti celeritate vera ſeu lineari c, datisque diſtantiis ſingulorum punctorum ab axe MN, poterit eo ipſo determinari celeritas vera x cujusvis alterius puncti A: erit enim $x : c = AF : af$ (471. §.); conſequenter $x = c \frac{AF}{af}$.

474. Corollarium 5.

Si punctum a corporis in motu gyratorio circa axem MN tantam per arcum ad acquirat celeritatem linearem ſeu veram c, et angularem γ, ut illud eadem celeritate motu uniformi circa MN quovis minuto ſecundo arcum $= de$, recta vero af ex a ad MN perpendicularis angulum $= dfe$ deberet percurrere; erit $c = de$, $\gamma = \varphi$ pro arcu φ ex f radio $= 1$ inter crura anguli dfe deſcripto (470. 465. §.), et $de : \varphi = af : 1$: debebit ergo eſſe

$$c = \gamma . af, \text{ et } \gamma = \frac{c}{af}.$$

475. Corollarium 6.

Adeoque, ſi noſcatur celeritas angularis γ in motu gyratorio dati corporis circa datum axem (468. §.) conſtans (459. §.), vel certo tempori t ab initio motus computati debita (467. §.), eaque multiplicetur per diſtantiam af dati puncti a ab axe MN, determinabitur eo ipſo vera ſeu linearis celeritas c puncti a (474. §.), a qua inventio celeritatum linearium omnium reliquorum punctorum ejusdem corporis dependebit (473. §.).

476. Corollarium 7.

Data autem celeritate vera ſeu lineari c unici puncti a corporis in motu gyratorio circa datum axem MN conſtituti, ſi illa dividatur per diſtantiam af ejusdem puncti ab eodem axe, invenietur eo ipſo celeritas angularis γ puncti a (474. §.) totiusque corporis (468. §.).

477. Theorema.

Si in puncta b *et* a (85. Fig.) *vel* a *et* d *plani* ABCD, *circa axem* MN *fixum cum illo firmiſſime connexum libere mobilis, aequidiſtantia ab axe* MN *agant vires aequales* P *et* Q *vel* Q *et* R *directionibus* bP *et* aQ *vel* aQ *et* dR *ad idem planum perpendicularibus; erunt eae vires inter ſe in aequilibrio.* Fig. 85.

Demonſtratio.

1. Si puncta b, a aequaliter diſtent ab axe MN, quo perpendicula $b\beta$, $a\alpha$ ex illis ad MN ducta ſint inter ſe aequalia; debebit recta ab in axe MN biſſecari: cum igitur vires aequales P, Q agentes in puncta b, a plani AC circa axem fixum MN volubilis neceſſario in aequilibrio eſſe debeant, ſi illae agentes in puncta b, a rectae inflexilis ba et circa fixum ejus punctum medium c libere mobilis eſſent in aequilibrio; patet, illas re ipſa futuras in aequilibrio (76. §.).

2. Si autem in puncta a, d aequidiſtantia ab axe MN agant vires aequales Q, R; ductis ad MN perpendiculis $a\alpha$, $d\beta$, productoque perpendiculo $d\beta$ in b, ut ſit $b\beta = d\beta = a\alpha$, cogitentur in b agere vires P, S, inter ſe et viribus aequalibus Q, R aequales, directionibus bP, bS ad planum AC perpendicularibus: erit vis S cum R, et P cum Q in aequilibrio, per demonſtrata in (1). Quare erunt omnes quatuor vires S, R, P, Q inter ſe in aequilibrio (64. §.), et eo ipſo, quia vires P, S ſunt inter ſe ſeorſim in aequilibrio (66. §.), debebunt iis ſublatis vires Q, R manere in aequilibrio (65. §.).

478. Corollarium.

Si duo plana ABDC, CDFE (86. Fig.) ſub quocunque angulo invariabili BDF circa axem fixum MN mobili inter ſe ſint connexa, in quorum puncta a, c aequidiſtantia ab axe MN agant vires aequales P, Q directionibus aP, cQ ad plana AD, ED perpendicularibus; erunt hae vires in aequilibrio. Sit ab in plano AD, bf = ab in plano ED perpendicularis ad axem MN, et in punctum f cogitentur agere vires q, p inter ſe et viribus aequalibus P, Q aequales directionibus fq, fp ad planum ED perpendicularibus: jacebunt directiones virium P, p in plano anguli abf; vires idcirco P, p erunt inter ſe in aequilibrio (76. §.). Quare, cum etiam vires q, Q debeant inter ſe eſſe in aequilibrio (477. §.), erunt omnes quatuor vires P, p, q, Q inter ſe in aequilibrio (64. §.): ſublatis itaque Fig. 86.

viribus p, q inter ſe ſeorſim in aequilibrio exiſtentibus (66. §.), manebunt reliquae P, Q inter ſe in aequilibrio (65. §.).

479. Theorema.

Si in duo puncta a, e *planorum* ABDC, EFDC *ſub angulo invariabili et circa axem fixum* MN *libere mobili inter ſe connexorum agant vires* P, R *directionibus ad eadem plana perpendicularibus; erunt illae in aequilibrio, ſi ſint inter ſe in ratione inverſa diſtantiarum* ab, ed *punctorum* a, e *ab axe* MN, *id eſt, ſi ſit* $P:R = ed:ab$: *et viciſſim, ſi vires* P, R *ſint in aequilibrio, erit* $P:R = ed:ab$.

Demonſtratio.

1. Per hypotheſin ſunt ab, ed perpendiculares diſtantiae punctorum a, e ab axe MN. Sit $ed > ab$, et fiat $cd = ab$, atque in punctum c cogitentur agere vires r, Q inter ſe et vi P aequales directionibus cr, cQ ad planum ED perpendicularibus.

2. Debebunt vires r, Q inter ſe neceſſario eſſe in aequilibrio per (66. §.), quidquid ſint reliquae vires P, R.

3. Ponamus jam eſſe $P:R = ed:ab$; erit ob (1) etiam $r:R = ed:cd$: vires igitur r, R erunt per (92. §.) inter ſe in aequilibrio. Quamobrem, cum etiam vires P, Q debeant eſſe inter ſe in aequilibrio (478. §.), erunt omnes quatuor vires r, R, P, Q inter ſe in aequilibrio (64. §.): unde, quia vires r, Q ſunt ſeorſim inter ſe in aequilibrio (2), neceſſario ſequitur, vires quoque P, R inter ſe ſeorſim eſſe in aequilibrio (65. §.).

4. Si autem dicas, vires P, R eſſe in aequilibrio; erunt ob (2) omnes quatuor vires r, Q, P, R inter ſe (64. §.), et binae P, Q ſeorſim inter ſe in aequilibrio, ob (1) per (478. §.): ſublatis igitur viribus P, Q manebunt vires r, R inter ſe in aequilibrio (65. §.). Erit itaque $r:R = ed:cd$ (92. §.); hinc ob (1) etiam $P:R = ed:ab$.

480. Corollarium.

Fig. 83. Si duae rectae af, AF (83. Fig.) cum axe fixo MN ſub angulis rectis firmiſſime ſint connexae, ita ut et utraque circa axem MN libere poſſit converti, et impoſſibile ſit, ut una illarum circa MN convertatur, quia eo ipſo altera quoque circa MN debeat converti; in puncta vero a, A agant vires P, R ſecundum directiones aP, AR perpendiculares ad af, AF

in

in planis ad MN perpendicularibus jacentes, in quibus jacent rectae af, AF: nitentur hae vires rectas af, AF in partes oppoſitas circa axem MN eadem prorſus efficacia convertere, ac ſi rectae af, AF pertinerent ad bina plana circa axem MN mobilia et in hoc firmiſſime inter ſe connexa, ad modum, qui in (86. Fig.) eſt conſpicuus. Vires ergo P, R erunt inter ſe in aequilibrio, ſi illae fuerint in ratione inverſa rectarum af, AF, id eſt, ſi fuerit P:R = AF:af; et viciſſim erit P:R = AF:af, ſi vires P, R ſint in aequilibrio (479. §.).

481. Problema.

Data directione vis V *agentis in punctum* A (87. Fig.) *circuli* Apq *circa axem fixum* MN *per ejus centrum* C *tranſeuntem et ad illius planum perpendicularem libere mobilis; determinare vim, quae tota ſua efficacia circulum* Apq *circa axem* MN *convertere nititur.* Fig. 87.

Solutio.

1. Directio datae vis V ſit AD in plano Aaeb perpendiculari ad planum circuli Apq hocque in Ab ſecante, quae detur per angulos $DAb = \beta$, $bAC = \alpha$ inter eandem directionem AD, radium circuli AC, et interſectionem communem Ab planorum Aaeb, Apq comprehenſos.

2. Si in plano aAbe ſit aA perpendicularis ad planum circuli Apq (1); poterit vis V agens in punctum A directione AD in duas vires reſolvi, quarum una agat directione Aa ſitque $= V \,\mathrm{Sin}\, DAb = V \,\mathrm{Sin}\, \beta$, et altera agat directione Ab ſitque $= V \,\mathrm{Coſ}\, DAb = V \,\mathrm{Coſ}\, \beta$, ob (1) per (115. §.). Quare, cum prior vis agens in punctum A directione Aa perpendiculari ad planum circuli Apq, adeoque parallela axi gyrationis MN nulla ratione poſſit influere in converſionem ejusdem circuli circa axem MN; videndum eſt, quantum influxum in hanc converſionem vis altera $= V \,\mathrm{Coſ}\, \beta$ agens in punctum A directione Ab jacente in plano circuli (1) habeat.

3. Si ad punctum A in plano circuli Apq ducatur tangens AB; erit illa perpendicularis ad radium AC. Vis ergo $= V \,\mathrm{Coſ}\, \beta$ in (2) agens in punctum A directione Ab poterit reſolvi in duas vires, quarum una $= V \,\mathrm{Coſ}\, \beta . \mathrm{Coſ}\, bAC = V \,\mathrm{Coſ}\, \beta \,\mathrm{Coſ}\, \alpha$ agat directione AC, et altera $= V \,\mathrm{Coſ}\, \beta . \mathrm{Sin}\, bAC = V \,\mathrm{Coſ}\, \beta \,\mathrm{Sin}\, \alpha$ agat directione AB per (115. §.). Eſt vero evidens, priorem vim nullo pacto in converſionem circuli Apq circa axem MN poſſe influere; alteram vero vim agentem directione AB in plano

 circuli

circuli Apq ad radium ejus AC perpendiculari tota ſua efficacia niti, eundem radium circulumque circa axem MN convertere.

4. In aſſumta hypotheſi (1) tantum ergo habebit data vis V, agens in punctum A ſecundum directionem AD, influxum in converſionem circuli Apq circa axem MN, quantum haberet vis $= V \operatorname{Cof} \beta \operatorname{Sin} \alpha$, ſi haec in punctum A ſecundum directionem tangentis AB ageret, quae tota ſua efficacia eundem circulum circa axem MN niteretur convertere (3).

482. Corollarium 1.

Semper, ſi in (481. §. 1. n.) ſit angulus $bAC = \alpha = 0$, erit vis $V \operatorname{Cof} \beta \operatorname{Sin} \alpha = 0$: quoties ergo directio AD datae vis V agentis in punctum A circuli Apq jacuerit in plano AaeC perpendiculari ad planum circuli et cum hoc radium AC pro communi interſectione habente, erit vis, quae in converſionem circuli Apq circa axem MN deberet impendi, aequalis nihilo, ipſaque converſio impoſſibilis (481. §. 1. 4. n.).

483. Corollarium 2.

Et pro angulo $DAb = \beta = 0$ erit vis $V \operatorname{Cof} \beta \operatorname{Sin} \alpha = V \operatorname{Sin} \alpha$, id eſt: ſi directio vis V agentis in punctum A circuli Apq jaceat in plano circuli, ita ut illa cum radio AC angulum α comprehendat; efficacia, qua illa circulum Apq circa axem MN nitetur convertere, aequabitur efficaciae, qua vis $= V \operatorname{Sin} \alpha$ in puncto A ſecundum directionem tangentis AB applicata eundem circa MN convertere niteretur; haec vero vis tota deberet in ejus converſionem impendi (481. §. 1. 4. n.).

484. Corollarium 3.

Quodſi autem ponas angulum $\alpha = 90°$ in (483. §.); erit vis $V \operatorname{Sin} \alpha = V$, id eſt: vis V agens in punctum A circuli Apq ſecundum directionem tangentis AB ad radium AC eo ipſo perpendicularem, nitetur tota ſua efficacia eundem circulum circa axem MN convertere (483. §.).

485. Corollarium 4.

Fig. 88. Conditio eſſentialis, ſine qua nulla vis V agens in punctum aliquod B (88. Fig.) corporis abcde, circa axem fixum MN cum illo firmiſſime connexum libere mobilis, poterit corpus abcde circa eundem axem convertere, eſt, ut illius directio non jaceat in plano circulum bpq per B tranſeuntem, et axi MN perpendicularem ita ſecante ſub angulo recto, ut inter-

ſectio

ſectio coincidat cum radio B C ad idem punctum B ducto (482. §.): omni autem alio caſu aderit una vis per (483. 484. 481. §. 4. n.) determinabilis, quae, ſecundum directionem tangentis B P ad radium B C perpendicularem in punctum B actura, tota ſua efficacia corpus a b c d e circa axem M N nitetur convertere.

486. Corollarium 5.

Si igitur motus gyratorius corporum circa datos axes fixos dependens a viribus in quaecunque illorum puncta agentibus generatim fuerit determinandus, licebit ſupponere, directiones omnium virium coincidere cum tangentibus, quae ad eadem puncta totidem circulorum ad axes gyrationis perpendicularium centraque in iisdem axibus habentium poſſunt duci (485. §.)

487. Theorema.

Si in punctis B, F *corporis* a b c d e *circa datum axem* M N *libere mobilis applicentur vires* P, Q, *quae idem corpus ſecundum directiones* B P, F Q *in partes oppoſitas circa axem* M N *nitantur convertere* (486. §.); *erunt illae in aequilibrio, ſi fuerint inter ſe in ratione inverſa diſtantiarum* B C, F D *punctorum* B, F *ab axe gyrationis* M N, *ſeu ſi fuerit* P:Q=FD:BC: *et viciſſim, quoties vires* P, Q *fuerint in aequilibrio, toties erit* P:Q=FD:BC.

Demonſtratio.

Per hypotheſim coincidunt directiones B P, F Q virium P, Q cum tangentibus, quae ad puncta B, F circulorum B p q, F n m ad M N perpendicularium et e centris C, D radiis C B, D F deſcriptorum poſſunt duci: quodſi ergo cogitentur duo plana A B C D, F E C D, quorum primum ſit perpendiculare ad planum circuli B p q hocque in B C interſecet, et alterum ſit perpendiculare ad planum circuli F n m, atque iſtud in F D interſecet; erunt directiones B P, F Q virium P, Q perpendiculares ad plana A B C D, F E C D, unde, ut patet, neceſſario ſequitur, vires P, Q debere eſſe in aequilibrio, ſi eſt P:Q=FD:BC; et eſſe P:Q=FD:BC, ſi vires P, Q ſunt in aequilibrio (479. §.).

488. Problema.

Si, dato puncto A *circa axem fixum* M N *in diſtantia* A F (83. Fig.) *libere mobili, cogitetur in eodem puncto maſſa* μ *collecta, quam vis quaecunque* R *ſecundum directionem* A R *ad motum circa* M N *ſollicitet* (486. §.): *invenire celeritatem veram* C *puncti* A, *quam eadem vis tempore* T *producat.* Fig. 83.

 Solutio.

Solutio.

1. Si vis R ſit invariabilis; debebit eſſe $C = 2g\frac{R}{\mu}T$ celeritas vera puncti A (469. §.), quam ea vis tempore T producet (387. 338. §.).

2. Quodſi autem maſſa μ in puncto A collecta a vi variabili ad motum circa axem MN ſollicitetur, et eadem vis intra tempus T fiat $= R$; debebit eſſe per (387. 347. §.) $s\,C = 2g\frac{R}{\mu}s\,T$.

489. Corollarium 1.

Omni ergo caſu, ſeu maſſa μ collecta in puncto A a vi invariabili $= R$ ad motum circa axem MN urgeatur, ſeu a vi variabili, quae intra tempus T, durante motu maſſae μ circa MN, fiat $= R$, ita erit comparata vera celeritas C puncti A, quam eadem vis tempore T producet, ut exponens rationis differentialis ejusdem celeritatis ſpectatae inſtar unius functionis temporis variabilis T futurus ſit (488. §.).

$$s\,C = 2g\frac{R}{\mu}s\,T.$$

490. Corollarium 2.

Quaelibet vis, tam invariabilis R, quam variabilis intra tempus T in vim $= R$ abiens, ſi illa datam maſſam μ in puncto A collectam ad motum circa axem MN ſecundum directionem AR continuo ſollicitet, producet intra tempus T celeritatem angularem γ puncti A rectaeque AF ad MN perpendicularis, cujus exponens differentialis erit per (489. 476. §.).

$$s\,\gamma = \frac{s\,C}{AF} = \frac{2g.R}{\mu.AF}s\,T.$$

491. Problema.

Si, datis duobus punctis a, A *inter ſe et cum axe gyrationis* MN *ita connexis, ut neutrum illorum circa* MN *poſſit converti, quin etiam alterum circa* MN *eo ipſo moveatur, in puncto a maſſa* m *collecta cogitetur, in puncto vero* A *agat quaecunque vis invariabilis* R *ſecundum directionem* AR (486. §.); *invenire celeritatem angularem* γ, *quam vis* R *tempore* T *producat.*

Solutio.

Solutio.

1. Puncta A, a rectaeque AF, af concipient tempore T eandem celeritatem angularem γ (468. §.).

2. Cogitentur in puncto a applicari duae vires invariabiles inter ſe aequales P, p ſecundum directiones oppoſitas aP, ap (486. §.); erunt eae inter ſe in aequilibrio (66. §.), conſequenter erit punctum a ob vires P, p, R in eodem ſtatu motus, in quem illud ob ſolam vim R, abſentibus viribus P, p intra tempus T poteſt reponi. Quodſi ergo vires P, p ita ſint comparatae, ut ſit $P = p : R = AF : af$, adeoque $P = p = R . \frac{AF}{af}$; debebit punctum a etiam in hac hypotheſi in eodem prorſus ſtatu motus manere, proinde eandem celeritatem angularem γ tempore T concipere (1). Sed vires P, R ſunt in hac hypotheſi inter ſe in aequilibrio (480. §.); quae idcirco tolli poſſunt, quin ideo ſtatus motus puncti a turbetur: punctum ergo a debebit datam celeritatem γ intra tempus T concipere, ſi illud a vi invariabili $p = R . \frac{AF}{af}$ ad motum circa MN continuo urgeatur.

3. Hinc autem (2) per (490. §.) ſequitur, celeritatem angularem γ debere eſſe

$$\gamma = \frac{2g}{m . af} . \frac{R . AF}{af} . T = \frac{2g . R . AF}{m . af^2} T.$$

492. Corollarium 1.

Coaequatis celeritatibus angularibus, quarum unam vis invariabilis R agens in punctum A intra tempus T debet producere, ſi in eodem puncto maſſa μ collecta cogitetur, et nulla in a; alteram vero eadem vis debet generare, ſi in puncto a maſſa m collecta concipiatur, et nulla in A, habebimus per (490. 491. §.).

$$\frac{2g . R}{\mu . AF} T = \frac{2g . R . AF}{m . af^2} . T:$$

igitur $m . af^2 = \mu . AF^2$.

Et viciſſim pro $m . af^2 = \mu . AF^2$, adeoque $\frac{1}{\mu . AF} = \frac{AF}{m . af^2}$ erunt celeritates angulares in (490. 491. §.) inter ſe aequales.

493. Co-

493. Corollarium. 2.

Producta $m.af^2$, $\mu.AF^2$ ex maſſis m, μ, quas in punctis a, A collectas imaginati nobis ſumus (490. 491. §.), in quadrata diſtantiarum reſpectivarum af, AF ab axe gyrationis MN ſunt momenta inertiae earundem maſſarum reſpectu axeos MN (398. §.): vis ergo invariabilis R agens in punctum A eandem tempore T producet celeritatem angularem γ, ſeu maſſa μ in puncto A collecta, nulla vero in a, ſeu maſſa m in puncto a collecta, nulla vero in A cogitetur, modo maſſae m, μ ita ſint comparatae, ut momentum inertiae maſſae μ in puncto A reſpectu axeos gyrationis MN aequetur momento inertiae maſſae m in puncto a reſpectu ejusdem axeos (492. §.).

494. Corollarium 3.

Si, data maſſa m collecta in puncto a, quaeratur vis invariabilis R, quae in puncto A applicata producat celeritatem angularem γ intra tempus T; erit illa ob (491. §.)

$$R = \frac{\gamma.m.af^2}{2g.T.AF}.$$

Per hanc vim invariabilem ita determinatur celeritas angularis γ puncti A rectaeque AF, ut alia vis hac major vel minor in eodem puncto A applicata neceſſario aliam celeritatem angularem majorem vel minorem deberet intra idem tempus generare (491. §.).

495. Corollarium 4.

Fig. 89. Si ergo in punctis a, b, c, d, e, - - - z (89. Fig.) circa datum axem MN mobilibus et cum eodem per perpendicula aa', bb', cc', dd', ee', - - - zz' ita connexis, ut punctum R per perpendiculum RS cum MN connexum, circa MN converti nequeat, quin eo ipſo omnia puncta circa MN debeant in eandem partem converti, totidem maſſae A, B, C, D, E, - - - Z collectae cogitentur, A' vero, B', C', D', E', - - - Z' ſint vires invariabiles, quarum prima A', vel ſecunda B', aut tertia C', et ſic porro, in puncto R ad celeritatem angularem γ intra tempus T producendam requiratur, prout vel tantum in puncto a adeſt maſſa A, vel tantum in b maſſa B, aut tantum in c maſſa C, et ſic porro; erit per (492. §.)

A' =

$$A^I = \frac{\gamma.A.a^I a^2}{2g.RS.T};\quad B^I = \frac{\gamma.B.b^I b^2}{2g.RS.T};$$

$$C^I = \frac{\gamma.C.c^I c^2}{2g.RS.T.};\quad D^I = \frac{\gamma.D.d^I d^2}{2g.RS.T};$$

$$E^I = \frac{\gamma.E.e^I e^2}{2g.RS.T}; - - - - - -$$

$$- - - - - - - Z^I = \frac{\gamma.Z.z^I z^2}{2g.RS.T}.$$

496. Corollarium 5.

Hinc (495. 494. §.) et ex notione celeritatis angularis (457. §.) evidenter ſequitur, quod, ſi omnes maſſae A, B, C, D, E, - - - - Z in ſuis punctis a, b, c, d, e, - - - z collectae ſimul circa axem MN debeant moveri, ita ut recta RS dato quocunque tempore T datam celeritatem angularem γ concipiat, ad generationem hujus celeritatis vis una invariabilis

$$X = A^I + B^I + C^I + D^I + E^I + - - - + Z^I =$$

$$= \frac{\gamma}{2g.RS.T}\left(\begin{matrix} A.a^I a^2 + B.b^I b^2 + C c^I c^2 + D.d^I d^2 \\ + E.e^I e^2 + - - - - - + Z.z^I z^2 \end{matrix}\right)$$

ſit neceſſaria, quin alia aliqua vis invariabilis, vi X major aut minor, in eodem puncto R applicata eandem celeritatem angularem γ intra idem tempus T poſſit generare.

497. Corollarium 6.

Quamobrem, ſi in hypotheſi maſſarum A, B, C, D, E, - - - Z in totidem punctis a, b, c, d, e, - - - z circa datum axem MN mobilibus collectarum (495. §.) in puncto R applicetur data vis invariabilis V; convertentur omnes maſſae circa axem MN, rectaque RS concipiet intra quodvis tempus T certam celeritatem angularem γ, pro qua debebit eſſe (496. §.)

$$V = \frac{\gamma}{2g.RS.T}\left(\begin{matrix} A.a^I a^2 + B.b^I b^2 + C.c^I c^2 + D.d^I d^2 \\ + E.e^I e^2 + - - - - - + Z.z^I z^2 \end{matrix}\right);$$

ipſa igitur celeritas γ erit

$$\gamma = \frac{2g.V.RS.T}{A.a^I a^2 + B.b^I b^2 + C.c^I c^2 + - - - + Z.z^I z^2},$$

id eſt; celeritas angularis γ, quam vis invariabilis V dato tempore T gene-

generabit, aequatur producto $2gVT.RS$ diviſo per ſummam productorum ex ſingulis maſſis A, B, C, - - - Z in punctis a, b, c, - - - z collectis in quadrata diſtantiarum reſpectivarum $a'a$, $b'b$, $c'c$, - - - $z'z$ ab axe gyrationis MN.

498. Problema.

Punctum R *eſt cum dato corpore circa axem fixum* MN *libere mobili ita connexum, ut illud a nulla vi circa* MN *poſſit converti, quin eo ipſo totum corpus motum gyratorium circa eundem axem concipiat* (453. §.): *invenire celeritatem angularem* γ (457. 468. §.) *et veram ſeu linearem celeritatem* C *puncti* R, *quam data vis invariabilis* V *tempore* T *debebit generare, ſi illa in punctum* R *ſecundum directionem* RV *agat* (486. §.).

Solutio.

Corpus rigidum, de quo hic ſermo eſt, poteſt ſpectari inſtar aggregati minimarum maſſularum cum axe gyrationis MN in certis diſtantiis aa', bb', cc', dd', ee', - - -, zz' cum illo firmiſſime connexarum (453. 60. §.): cum igitur momentum inertiae ejusdem corporis reſpectu axeos MN aequetur ſummae productorum ex ſingulis maſſulis in quadrata reſpectivarum diſtantiarum ab axe MN (398. §.); obtinebitur celeritas angularis γ, quam data vis invariabilis V intra tempus T producet, ſi productum $2gVT.RS$ dividatur per momentum inertiae dati corporis reſpectu axeos MN (495. §.): et ſi haec celeritas multiplicetur per RS, invenietur celeritas vera puncti R, quam eadem vis intra idem tempus generabit (475. §.). Quamobrem, ſi pro pondere ſeu ei proportionali maſſa P dati corporis denotet Pk^2 illius momentum inertiae reſpectu axeos MN (402. §.), erit (497. §.)

$$\gamma = 2gT\frac{V.RS}{Pk^2};\quad C = 2gT\cdot\frac{V.RS^2}{Pk^2}.$$

499. Problema.

In eadem hypotheſi (498. §.) *inveſtigare celeritatem angularem* γ *et veram* C *puncti* R, *quam data quaecunque vis variabilis in* R *agens tempore* T *producat.*

Solutio.

1. Vis variabilis in puncto R applicata debebit toto tempore T, quo motus gyratorius corporis circa axem MN durare ſupponitur, creſcere vel

vel decreſcere (294. §.), ita ut, ſi tempus T creſcat differentia ΔT, et V quantitatem vis in fine temporis T exprimat, haec intra tempusculum ΔT incrementum aliquod ΔV capiat, vel decrementum ΔV patiatur: vis ergo in fine temporis T adeoque initio tempusculi ΔT agens in R erit $= V$; vis vero, quae in fine temporis $T + \Delta T$, conſequenter in fine tempusculi ΔT aget in R, erit $= V + \Delta V$, vel $= V - \Delta V$.

2. Semper autem, ſeu creſcat vis agens in R ſeu decreſcat tempore T (1), debebit celeritas angularis γ tempore T genita, creſcente tempore T differentia ΔT, augeri certa differentia $\Delta \gamma$, quae celeritati aequabitur a vi in R agente tempusculo ΔT productae.

3. Cum jam initio tempusculi ΔT agat in R vis $= V$, haecque toto tempusculo ΔT continuo creſcat, vel continuo decreſcat, et in fine tempusculi ΔT fiat $= V + \Delta V$ vel $= V - \Delta V$ (1); evidens eſt, vim in R corpus ad motum circa axem MN continuo ſollicitantem quovis momento, durante motu tempusculo ΔT, minorem eſſe vi invariabili $= V + \Delta V$ et majorem vi invariabili $= V$, vel majorem vi invariabili $= V - \Delta V$ et minorem vi invariabili $= V$.

4. Igitur in hypotheſi vis continuo creſcentis erit celeritas $\Delta \gamma$, quam illa tempusculo ΔT producit (2), major celeritate, quam vis invariabilis $= V$, et minor illa, quam vis invariabilis $= V + \Delta V$ eodem tempusculo produceret (3).

5. Si autem vis continuo decreſcat, debebit eſſe celeritas $\Delta \gamma$, quam illa tempusculo ΔT generat, minor celeritate, quam vis invariabilis $= V$, et major celeritate, quam vis invariabilis $= V - \Delta V$ intra idem tempusculum generaret (3).

6. Sed, ſi P ſit pondus ſeu ei proportionalis maſſa corporis circa axem MN mobilis, et Pk^2 illius momentum inertiae reſpectu axeos MN, quaevis autem virium invariabilium V, $V + \Delta V$, $V - \Delta V$ ſeorſim in punctum R agere cogitetur; debebit tempusculo ΔT generare per (498. §.)

vis V celeritatem angularem $= \frac{2gV.RS}{Pk^2} \Delta T$;

vis $V + \Delta V$ celeritatem angularem $= \frac{2g(V + \Delta V).RS}{Pk^2} \Delta T$;

vis $V - \Delta V$ celeritatem angularem $= \frac{2g(V - \Delta V)RS}{Pk^2} \Delta T$.

 7. Quam-

7. Quamobrem habebimus ob (4) (5) (6) pro quovis quantumcunque parvo tempusculo ΔT

$$\Delta\gamma > \frac{2g V.RS}{Pk^2}\Delta T;\ \text{et}\ \Delta\gamma < \frac{2g(V+\Delta V)RS}{Pk^2}\Delta T;$$

vel

$$\Delta\gamma < \frac{2g V.RS}{Pk^2}\Delta T;\ \text{et}\ \Delta\gamma > \frac{2g(V-\Delta V)RS}{Pk^2}\Delta T.$$

8. Poteſt porro, ſicut in (347. §. 6. n.), poni $\Delta V = l\Delta T + m\Delta T^2 + n\Delta T^3 + \text{etc.}$ pro certis coefficientibus l, m, n, etc. independentibus a ΔT; pro hoc vero valore in (7) ſubſtituto fiet

$$\frac{\Delta\gamma}{\Delta T} > \frac{2g V.RS}{Pk^2};\ \text{et}\ \frac{\Delta\gamma}{\Delta T} < \frac{2g V.RS}{Pk^2} + \frac{2g\ RS}{Pk^2}(l\Delta T + m\Delta T^2 + n\Delta T^3 + \text{etc.});$$

vel

$$\frac{\Delta\gamma}{\Delta T} < \frac{2g V.RS}{Pk^2};\ \text{et}\ \frac{\Delta\gamma}{\Delta T} > \frac{2g.VRS}{Pk^2} - \frac{2g.RS}{Pk^2}(l\Delta T + m\Delta T^2 + n\Delta T^3 + \text{etc.}).$$

9. Quapropter erit per (Vol. I. §. 131.) exponens rationis differentialis celeritatis angularis γ conſideratae inſtar unius functionis temporis variabilis T omni caſu

$$\partial\gamma = \frac{2g.RS}{Pk^2} V\,\partial T.$$

10. Hinc, quia pro celeritate angulari γ debet eſſe $C = \gamma.RS$ vera ſeu linearis celeritas puncti R; erit exponens rationis differentialis verae celeritatis C puncti R (475. §.) omni caſu, ſeu creſcat ſeu decreſcat vis agens in R, $\partial C = \partial\gamma.RS$, adeoque per (9)

$$\partial C = \frac{2g\ RS^2}{Pk^2} V\,\partial T.$$

11. Cognita ergo lege, qua data vis variabilis, durante motu gyratorio corporis circa axem MN tempore T, creſcat vel decreſcat, exprimatur V per congruam functionem vel ipſius temporis T, vel celeritatis angularis γ aut linearis C: ſi enim haec functio loco V in (9) (10) ſubſtituatur, obtinebitur utroque caſu aequatio differentialis inter duas variabiles γ et T vel C et T, ex qua ope calculi integralis ipſam celeritatem angularem γ vel linearem C licebit elicere.

500. Co-

500. Corollarium.

Omnis ergo vis, tam invariabilis V agens in punctum R directione RV (486. §.), quam variabilis intra tempus T in vim = V abiens, ſi illa corpus quodcunque, cum dato axe gyrationis MN firmiſſime connexum, ad motum circa eundem axem continuo ſollicitet, producet tempore T celeritatem angularem γ et veram C puncti R, pro qua, denotante P maſſam, et Pk^2 momentum inertiae ejusdem corporis reſpectu axeos MN, debebit eſſe (499. 498. §.)

$$s\gamma = \frac{2g.RS}{Pk^2} V s T; \quad s C = \frac{2g.RS^2}{Pk^2} V s T.$$

501. Definitio.

Si maſſae A, B, D, E, F, a quibuscunque viribus ad motum gyratorium circa datum axem mn continuo ſollicitentur, (92. Fig.), una vero maſſa M ita ſit comparata, ut datae vires eandem intra datum quodcunque tempus celeritatem angularem debeant producere, ſeu ab illis omnes maſſae A, B, D, E, F, circa axem mn ad motum urgeantur, ſeu, remotis omnibus his maſſis, ſola maſſa M in certo puncto d collecta ab iisdem viribus circa mn moveatur; dicetur maſſis A, B, D, E, F reſpondere in puncto d maſſa *aequivalens* M; datas vero maſſas A, B, D, E, F ad punctum d *reducere* idem erit, ac maſſam aequivalentem M in dato puncto d determinare. Fig. 92.

502. Corollarium.

Ad quodcunque punctum reducantur maſſae in motu gyratorio circa datum axem conſtitutae; eaedem manebunt celeritates verae, ſeu lineares ſingulorum punctorum in motu gyratorio circa eundem axem conſtitutorum (501. 475. 473. §.).

503. Problema.

Corpus R (90. 91. Fig.) *ſollicitatur a vi U agente in punctum a ad motum gyratorium circa axem* mn; *reducere maſſam corporis* R *ad datum punctum* a. Fig. 90. 91.

Solutio.

1. Quidquid eſt vis maſſam R ad motum circa axem mn ſollicitans, invariabilis = U, vel variabilis intra tempus T in vim = U abiens, neceſſe eſt,

eſt, ut illa tempore T producat certam celeritatem angularem γ, quae, ſi Rk^2 deſignet momentum inertiae ejusdem maſſae reſpectu axeos mn, det (500. §.)

$$\varepsilon\gamma = \frac{2g.ab}{Rk^2} \cdot U\varepsilon T: \text{ igitur } \gamma = \frac{2g.ab}{Rk^2} \int U\varepsilon T.$$

2. Si, abſente corpore R, in puncto a, in quod vis U agit, maſſa x collecta cogitetur; debebit vis U inter tempus T producere celeritatem angularem y, quae per (490. §.) dabit

$$\varepsilon y = \frac{2g}{x.ab} U\varepsilon T: \text{ igitur } y = \frac{2g}{x.ab} \int U\varepsilon T.$$

3. Quamobrem, ſi maſſa corporis R ad punctum a ſit reducenda, quo maſſa aequivalens x in puncto a determinetur; debebit in (1) (2) per (501. §.) poni $\gamma = y$: igitur erit

$$\frac{2g.ab}{Rk^2} \int U\varepsilon T = \frac{2g}{x.ab} \int U\varepsilon T;$$

hinc maſſa aequivalens $x = \frac{Rk^2}{ab^2}$.

504. Corollarium 1.

A quacunque vi U agente in punctum a datum corpus R ad motum gyratorium circa datum axem mn ſollicitetur; dabit corpus R reductum ad idem punctum a maſſam aequivalentem x aequalem momento inertiae ejusdem corporis reſpectu axeos mn diviſo per quadratum diſtantiae ab puncti a ab axe gyrationis mn (503. §.).

505. Corollarium 2.

Fig. 92. Si plures maſſae A, B, D, E, F ab aliqua vi U agente in punctum a (92 Fig.) ad motum gyratorium circa datum axem mn continuo urgeantur, cum omnes maſſae A, B, D, E, F inſtar totidem partium unius corporis circa axem mn mobilis poſſint conſiderari; erit maſſa aequivalens, quam eaedem maſſae A, B, D, E, F ad punctum a reductae dabunt, aequalis ſummae momentorum inertiae ſingularum maſſarum A, B, D, E, F reſpectu axeos gyrationis mn diviſae per quadratum ab^2 diſtantiae ab puncti a ab eodem axe (504. 399. §.).

506. Co-

506. Corollarium 3.

Quoties ergo motus gyratorius aut unius maſſae R (90. 91. Fig.), aut plurium maſſarum A, B, D, E, F (92. Fig.) circa datum axem m n, dependens ab aliqua vi U agente in datum punctum a, fuerit determinandus; quaerantur ante omnia momenta inertiae ſingularum maſſarum reſpectu axeos gyrationis m n; tum determinetur maſſa aequivalens M in puncto a reſpondens omnibus maſſis per (504. 505. §.): inventa enim maſſa hac M licebit ob (501. §.) inveſtigare tam celeritatem angularem γ quam veram C puncti a per (488. 489 490. §.), qua cognita poterit per (473. §.) determinari etiam vera celeritas cujusvis alterius puncti in motu circa axem m n conſtituti.

507. Corollarium 4.

Sit in puncto d collecta maſſa u, et in punctum a agat quaecunque Fig. 90. 91. vis U; debebit haec intra tempus T producere certam celeritatem angularem z, pro qua, cum $u . cd^2$ ſit momentum inertiae maſſae u reſpectu axeos m n (398. §.), debebi eſſe per (500. §.)

$$\partial z = \frac{2g.ab}{u.cd^2} U \partial T: \text{ igitur } z = \frac{2g.ab}{u.cd^2} \int U \partial T.$$

Si igitur ponas $z = y$ in (503. §. 2. n.), obtinebis

$$\frac{2g.ab}{u.cd^2} \int U \partial T = \frac{2g}{x.ab} \int U \partial T:$$

$$\text{adeoque fiet } u = \frac{x.ab^2}{cd^2}.$$

508. Corollarium 5.

Ex (507. §.) et (503. §. 2. n.) ſequitur, quod pro caſu vis invariabilis in (493. §.) eſt demonſtratum: nimirum, vim quoque variabilem agentem in datum punctum a eandem intra idem tempus celeritatem angularem producturam, ſeu in puncto a collecta ſit maſſa x, et abſit omnis alia maſſa convertenda circa datum axem m n; ſeu in puncto d collecta ſit maſſa u, et nulla in a, modo tales ſint maſſae x, u, ut momentum inertiae $x . ab^2$ maſſae x in puncto a aequetur momento inertiae $u . cd^2$ maſſae u in puncto d reſpectu axeos m n.

509. Co-

509. Corollarium 6.

In (507. 503. §.) eſt $u = \frac{Rk^2}{cd^2}$: erat autem x in (503. §.) maſſa aequivalens in puncto a debita maſſae corporis R ad idem punctum reductae, et u in (507. §.) maſſa aequivalens in puncto d debita maſſae x ad idem punctum reductae; adeoque debebit eſſe $u = \frac{Rk^2}{cd^2}$ maſſa aequivalens in puncto d debita maſſae corporis R reductae ad punctum d (501. §.). Hinc igitur et ex (504. §.) generatim ſequitur, maſſam cujuslibet corporis R circa axem fixum m n mobilis ad quodcunque punctum reductam (punctum a, in quovis U ſupponitur applicari, vel aliud aliquod d) dare in eodem puncto maſſam aequivalentem aequalem momento inertiae corporis R reſpectu axeos m n diviſo per quadratum diſtantiae ejusdem puncti (a vel d) ab axe m n.

510. Corollarium 7.

Fig. 92. Hinc vero (509. §.) per (506. §.) porro elucet, plures maſſas A, B, D, E, F circa datum axem m n mobiles (92. Fig.) ad quodlibet punctum, (a in quo certa vis U agat, vel aliud d) reductas dare in eodem puncto maſſam aequivalentem aequalem ſummae momentorum inertiae ſingularum maſſarum A, B, D, E, F reſpectu axeos m n diviſae per quadratum diſtantiae ejusdem puncti (a vel d) ab axe m n.

DISSER-

DISSERTATIO XIII.

DE MOTU PENDULORUM, CENTROQUE OSCILLATIONIS.

511. Definitio.

Si corpus grave FDBE (93. Fig.) ope rectae inflexilis aB tranſeuntis per ejus centrum gravitatis G et ad datum axem fixum horizontalemque nm perpendicularis cum hoc in puncto a ita connectatur, ut illud circa nm libere poſſit moveri; vocabitur a FDBE *Pendulum compoſitum;* punctum a erit *punctum ſuſpenſionis;* et angulus G$a\beta$, ſub quo recta Ga inclinetur ad rectam verticalem $\alpha\beta$ tranſeuntem per punctum ſuſpenſionis, appellabitur *Elongatio a ſitu naturali.* Fig. 93.

512. Corollarium 1.

Recta aG inter centrum gravitatis penduli punctumque ſuſpenſionis intercepta aequatur diſtantiae centri gravitatis ab axe ſuſpenſionis nm (511. §.).

513. Corollarium 2.

Rectae verticales Gv, aβ ductae e centro gravitatis G punctoque ſuſpenſionis a ſunt in plano verticali ad axem nm in a perpendiculari inter ſe parallelae, ita ut angulus BGv debeat aequari elongationi Gaβ penduli a ſitu naturali (511. §.).

514. Corollarium 3.

Si P ſit pondus penduli ſeu maſſa ei proportionalis, licebit totum pendulum omni gravitate deſtitutum conſiderare, quin ideo ſtatus motus turbetur, in quo illud ob gravitatem cogatur perſeverare, modo centrum gravitatis G a vi v = P directione verticali Gv deorſum continuo urgeri ſupponatur (148. §.).

515. Corollarium 4.

Poteſt autem vis $v = P$ agens directione Gv reſolvi in vim $= P \, \mathrm{Coſ} \, \beta G v = P \, \mathrm{Coſ} \, G a \beta$ ſecundum directionem $G\beta$, et alteram $y = P \, \mathrm{Sin} \, \beta G v = P \, \mathrm{Sin} \, G a \beta$ ſecundum directionem Gy in eodem cum Gv plano ad aG perpendicularem (115. §.): priorem vim ſuſtinet, ut patet, ſolus axis fixus nm in puncto a; poſterior vero vis nititur tota ſua efficacia rectam Ga ipſumque pendulum circa axem nm movere.

516. Corollarium 5.

Si ergo pendulum in ſitu naturali, centro gravitatis G cum puncto ſuſpenſionis a in eadem recta verticali $a\beta$ jacente, quieſcat; debebit illud, ob angulum $G a \beta = 0$, adeoque etiam $P \, \mathrm{Sin} \, G a \beta = 0$, perpetuo in eodem ſitu quieſcere, niſi externa aliqua cauſa independens a vi gravitatis ejus ſtatum turbet (514. 515. §.).

517. Corollarium 6.

In quovis autem alio ſitu, ſub qualibet elongatione $G a \beta$ a ſitu naturali (511. §.), concipiet pendulum ob ſolam gravitatem motum gyratorium circa axem ſuſpenſionis nm, quo ſingula ejus puncta quovis tempuſculo per certos arcus circulares in planis verticalibus ad nm perpendicularibus debebunt promoveri, ipſo centro gravitatis G incedente in arcu Gg circuli e puncto ſuſpenſionis a radio aG in eodem plano verticali deſcripti, in quo jacent rectae aG, $a\beta$ (514. 515. §.).

518. Corollarium 7.

Quamobrem cognita celeritate lineari ſeu vera C, quam centrum gravitatis G penduli intra datum tempus T concipiat, innoteſcet eo ipſo celeritas angularis $= \frac{C}{aG}$ totius penduli (517. 468. 476. §.); verae autem celeritates omnium reliquorum punctorum poterunt inde per (473. §.) determinari.

519. Problema.

Datis elongatione $\varphi = G a \beta$ *a ſitu naturali, maſſa ſeu ei proportionali pondere* P *penduli, et diſtantia* $AG = D$ *illius centri gravitatis ab axe ſuſpenſionis* nm, (511. 512. §.); *invenire veram celeritatem* C, *quam centrum gravitatis* G *durante motu per arcum* Gg (518. §.) *concipiet.*

Solutio.

Solutio.

1. Pendulum aFDBE poteſt concipi omnis gravitatis expers, ſi in ejus centrum gravitatis G vis $v = P$ directione verticali Gv deorſum continuo agere ſupponatur (514. §.).

2. Ob hanc vero vim (1) concipiet centrum gravitatis G durante ejus motu per arcum Gg eandem celeritatem veram C, quam, abſente corpore FDBE, punctum G rectae aG conciperet, ſi in illo maſſa M aequivalens maſſae totius penduli eſſet collecta (501. §.).

3. Si igitur GH, gh ſint perpendiculares ad rectam verticalem $a\beta$, ponaturque $aH = e$, $ah = x$; erit ob (1) (2) per (389. §.) quaeſita celeritas

$$C = 2\sqrt{\frac{gP}{M}}\,(x - e).$$

4. Sit k recta, per cujus quadratum k^2 debet multiplicari maſſa P penduli, ut productum Pk^2 aequetur ejus momento inertiae reſpectu axeos horizontalis tranſeuntis per centrum gravitatis G et paralleli axi mn (402. §.); erit $Pk^2 + PD^2$ momentum inertiae penduli reſpectu axeos nm (406. §.), et $M = \frac{Pk^2 + PD^2}{D^2}$ maſſa in puncto G aequivalens maſſae penduli (2) per (504. §.).

5. Porro pro data elongatione a ſitu naturali $\varphi = Ga\beta$, ſi praeterea ponatur angulus $Gag = \alpha$, fiet $aH = e = D\,\mathrm{Coſ}\,\varphi$, et $ah = x = D\,\mathrm{Coſ}\,(\varphi - \alpha)$: conſequenter erit

$$x - e = D\,(\mathrm{Coſ}(\varphi - \alpha) - \mathrm{Coſ}\,\varphi).$$

6. Pro his igitur valoribus (4) (5) in (3) ſubſtitutis obtinebimus ſequentem expreſſionem celeritatis linearis C, quam centrum gravitatis G penduli durante motu per arcum Gg debebit concipere.

$$C = 2D\left(\frac{gD}{k^2 + D^2}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{(\mathrm{Coſ}(\varphi - \alpha) - \mathrm{Coſ}\,\varphi)}.$$

520. Corollarium 1.

Creſcente arcu Gg creſcet quoque angulus $\alpha = Gag$, hinc decreſcet $\varphi - \alpha = gaC$, et creſcet $\mathrm{Coſ}(\varphi - \alpha)$: celeritas centri gravitatis G durante motu in arcu GC debet ergo continuo creſcere (519. §.).

521. Corollarium 2.

Si centrum gravitatis G percurſo toto arcu GC incidat in lineam verticalem $a\beta$ in puncto C, abibit angulus $\alpha = GaG$ in $\varphi = GaC$, adeoque fiet $\varphi - \alpha = 0$ et $Coſ(\varphi - \alpha) = 1$: in puncto C lineae verticalis $a\beta$ habebit igitur centrum gravitatis G penduli celeritatem (519. §.).

$$C = 2D\left(\frac{gD}{k^2+D^2}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{(1 - Coſ\varphi)} = 2D\sqrt{\left(\frac{gD}{k^2+D^2} \cdot Sin\,v\,\varphi\right)}.$$

522. Corollarium 3.

Si porro centrum gravitatis G percurſo arcu Gc ſupponatur excurrere ultra C per arcum CI, abibit angulus $\alpha = Gag$ in $\alpha = GaI = \varphi + CaI$, adeoque fiet $\varphi - \alpha = -CaI$, hinc erit $Coſ(\varphi - \alpha) = Coſ(-CaI) = Coſ\,CaI$: celeritas centri gravitatis in puncto I erit igitur (519. §.)

$$C = 2D\left(\frac{gD}{k^2+D^2}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{(Coſ\,CaI - Coſ\varphi)}.$$

523. Corollarium 4.

Quare, ſi ſit angulus $CaI < \varphi = GaC$; erit $Coſ\,CaI < 1$ et $> Coſ\varphi$, creſcente vero angulo CaI decreſcet CoſCaI, et differentia $Coſ\,CaI - Coſ\varphi$: centrum gravitatis G habebit ergo in quovis puncto I celeritatem realem C minorem illa, quam in puncto C rectae verticalis $a\beta$ habuit (521. 522. §.), eaque fiet eo minor, quo magis creverit angulus CaI creſcente arcu CI (522. §.), modo ſit $CaI < GaC$ et $CI < GC$.

524. Corollarium 5.

Sed pro $CaI = \varphi = GaC$ fiet celeritas centri gravitatis G in puncto I aequalis nihilo, ob $Coſ\,CaI - Coſ\varphi = 0$ (522. §.); et pro $CaI > \varphi = GaC$ erit $Coſ\,CaI < Coſ\varphi$, adeoque $Coſ\,CaI - Coſ\varphi$ valoris negativi, celeritasque centri gravitatis G in I imaginaria (522. §.).

525. Corollarium 6.

Quare, ſi pendulum in ſitu aFDBE per datam elongationem $\varphi = Ga\beta$ a ſitu naturali (511. §.) determinato quieſcat, ita illud a ſola gravitate ad motum gyratorium circa axem ſuſpenſionis nm ſollicitabitur (514. 517. §.), ut ejus centrum gravitatis G, abſentibus omnibus motus obſtaculis, celeritate continuo creſcente in arcu GC ad rectam verticalem $a\beta$ per punctum ſuſpen-

ſuſpenſionis a traſeuntem ſit deſcenſurum (520. §.), obtentaque celeritate maxima in puncto C ejusdem rectae (521. §.) ultra hanc rectam per arcum CI celeritate continuo decreſcente aſcenſurum (523. §.), donec percurſo arcu CI aequali arcui GC, per quem deſcenderat, omni celeritate ſpolietur (524. §.), conſequenter ob parem gravitatis actionem ex puncto I ad G celeritate motu eadem lege primum accelerato usque C, tum retardato redire cogatur.

526. Corollarium 7.

Motus penduli aFDBE circa axem ſuſpenſionis nm erit ergo *oſcillatorius*, quo illius centrum gravitatis G alternatim recedet a ſuo ſitu initiali per arcum GI, et accedet ad illum per arcum IG, ita ut arcus GC, IC ad partes oppoſitas rectae verticalis $a\beta$ traſeuntis per punctum ſuſpenſionis a ſint inter ſe aequales futuri (525. §.): motus idcirco per arcum $GI = 2GC = 2CI$ vocari ſolet *integra*, et per GC, aut CI *dimidia Oſcillatio.*

527. Corollarium 8.

De reliquo evidens eſt, celeritatem maximam centri gravitatis G, quam illud in puncto infimo C arcus GI debet habere; per elongationem penduli a ſitu naturali $\varphi = GaC$ (511. §.) ſic eſſe determinatam, ut illa eo minor ſit, quo minor eſt haec elongatio, et aequetur nihilo, pro elongatione $\varphi = GaC = 0$ (521. §.).

528. Problema.

Data elongatione penduli a ſitu naturali $\varphi = GaC$ (511. §.); *invenire tempus* T *integrae oſcillationis in arcu* $GI = 2GC$ (526. §).

Solutio.

Tempus unius integrae oſcillationis T aequatur tempori, quo centrum gravitatis G percurrit arcum $GI = 2GC$ circuli radio $aG = D$ in plano verticali ad axem ſuſpenſionis nm perpendiculari deſcripti: quare, cum centrum gravitatis G in hoc motu poſſit ſpectari inſtar puncti maſſae $M = \frac{P(k^2 + D^2)}{D^2}$, quod a vi $v = P$ perpetuo ſecundum directionem verticalem Gv deorſum impulſum in arcu circulari GI incedere cogatur (519. §. 1. 2. 3. n.); invenies per (396. §.) pro $r = D = aG$, $b = CH = D \operatorname{Sin} v\varphi$, $V = P$, et $M = \frac{P(k^2 + D^2)}{D^2}$ tempus dimidiae oſcillationis,

nis, cujus duplum dabit tempus unius integrae oſcillationis ut ſequitur

$$T = \pi S \sqrt{\frac{k^2 + D^2}{2gD}}$$

pro $S = 1 + \ldots + \left(\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \ldots \ldots 2n}\right)^2 \cdot \left(\frac{b}{2D}\right)^n =$

$$= 1 + \ldots + \left(\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \ldots \ldots 2n}\right)^2 \cdot \left(\frac{\operatorname{Sin} v\,\varphi}{2}\right)^n.$$

Conſtat autem, terminum indeterminatum factoris S daturum ſingulos illius terminos poſt primum $= 1$ ordine ſequentes, ſi ſucceſſive fiat $n = 1$, $n = 2$, $n = 3$, et ita porro.

529. Corollarium.

Quo minor fuerit elongatio penduli a ſitu naturali $\varphi = GaC$, eo minor erit arcus $GI = 2GC$, in quo ſingulae oſcillationes perficientur (526. §.), eoque minor fiet $b = CH = D \operatorname{Sin} v\,\varphi$: et ſi adeo parva ſit elongatio φ, conſequenter etiam arcus GI adeo exiguus, ut $b = CH$ reſpectu radii $D = aG$ prope evaneſcat; erit valor fractionis $\frac{b}{2D}$ prope aequalis nihilo. Tempus igitur integrae oſcillationis in valde parvo arcu GI poterit ob (528. §.) poni

$$= \pi \sqrt{\frac{k^2 + D^2}{2gD}},$$

$$\text{et accuratius} = \pi \left(1 + \frac{b}{8D}\right) \sqrt{\frac{k^2 + D^2}{2gD}}.$$

Scholion.

Proprie nequit in (528. §.) fieri $T = \pi \sqrt{\frac{k^2 + D^2}{2gD}}$, niſi b penitus evaneſcat, ſeu fiat $b = 0$, adeoque arcus GI, in quo oſcillationes perfici ſupponuntur, in punctum C abiens nullus evadat. Cum autem pendulum in ſitu naturali, exiſtente $b = 0$, perfecte debeat quieſcere (516. §.), ejusdemque celeritas in hoc ſitu aequetur nihilo (527. §.); clarum eſt, expreſſionem temporis in (528. §.) ita eſſe ad certum valorem b pendentem ab elongatione penduli $\varphi = GaC$ reſtrictam, ut $T = \pi \left(\frac{k^2 + D^2}{2gD}\right)^{\frac{1}{2}}$ proprie denotare debeat tempus vero proximum, quo pendulum in arcu GI prope evaneſcente, non tamen aequali nihilo, ſingulas oſcillationes perficiat.

530. De-

530. DEFINITIO.

Si corpus grave FDBE ſucceſſive decreſcat, ac demum in unum punctum grave G abire cogitetur, ope rectae inflexilis aG et omni gravitate deſtituta cum fixo puncto a ita connexum, ut circa hoc libere poſſit moveri; habebitur loco penduli compoſiti (511. §.) *ſimplex pendulum* longitudinis aG.

531. Corollarium 1.

Quaecunque ſuperius pro pendulo compoſito aFDBE ſunt demonſtrata, ſubſiſtent etiam pro pendulo ſimplici aG, in quod illud abibit, ſi corpus grave FDBE in unum punctum grave G abeat (530. §.), cujus momentum inertiae Pk^2 (519. §. 4. n.) reſpectu axeos horizontalis per G tranſeuntis et axi nm paralleli aequetur nihilo, ob $k=0$ (398. 402. §.).

532. Corollarium 2.

Pendulum ſimplex in ſitu verticali $a\beta$ quieſcens perpetuo quieſcet, niſi ab externa aliqua vi, independente a gravitate, ad motum concitetur (531. 516. §.).

533. Corollarium 3.

In quovis alio ſitu per elongationem $\varphi = Ga\beta$ a ſitu naturali determinato (511. §.) debebit pendulum ſimplex aG ad motum oſcillatorium a gravitate concitari, vi cujus punctum grave G alternatim deſcendet per arcum GC aſcendetque per illi aequalem CI, et deſcendet per IC aſcendetque per CG (531. 526. §.).

534. Corollarium 4.

Deſcenſus penduli per GC vel IC tempore unius integrae oſcillationis in arcu GI (533. 526. §.), fiet celeritate continuo creſcente, aſcenſus vero per CI vel CG celeritate continuo decreſcente evaneſcenteque in I vel G (531. 525. §.): maxima vero celeritas penduli in infimo puncto C arcus GCI ita dependebit ab ejus elongatione $\varphi = GaC$ a ſitu naturali, ut ea pro $b = CH$ et longitudine penduli $aG = D$ futura ſit (531. 521. §.).

$$C = 2\sqrt{gD \operatorname{Sin} v\, \varphi} = 2\sqrt{gb} = 2\sqrt{g \cdot CH}.$$

535. Corollarium 5.

Tempus porro unius integrae oſcillationis penduli ſimplicis in arcu $GI = 2GC$ (533. 526. §.), data tam ejus longitudine $D = aG$, quam elon-

elongatione $\varphi = GaC$ a ſitu naturali, pro qua fit $CH = b = D \operatorname{Sin} v \varphi$, obtinebitur per (531. 528. §.)

$$T = \pi S \sqrt{\frac{D}{2g}}.$$

$$\text{pro } S = 1 + \cdots + \left(\frac{1.3.5.\ldots(2n-1)}{2.4.6.\ldots\ldots 2n}\right)^2 \cdot \left(\frac{b}{2D}\right)^n =$$

ſeu

$$= 1 + \cdots + \left(\frac{1.3.5.\ldots(2n-1)}{2.4.6.\ldots\ldots 2n}\right)^2 \cdot \left(\tfrac{1}{2} \operatorname{Sin} v \varphi\right)^n.$$

536. Corollarium 6.

Si autem adeo exigua fuerit elongatio $\varphi = gaC$ penduli ſimplicis, adeoque arcus $gI = 2gC$, in quo illud ſingulas oscillationes perficiat, adeo parvus, ut $b = CH$ reſpectu longitudinis $D = aG$ prope evaneſcat; erit ob (536. §.), ut in (529. §.), tempus unius integrae oscillationis in ejusmodi arcu gI prope verum

$$T = \pi \sqrt{\frac{D}{2g}}; \text{ et accuratius } T = \pi \left(\frac{D}{2g}\right)^{\frac{1}{2}} \left(1 + \frac{b}{8D}\right).$$

537. Corollarium 7.

Ex (536. §.) obtinetur $g = \frac{D\pi^2}{2T^2}$ altitudo, per quam corpus grave libere labens primo minuto ſecundo decidit (323. §.): cognito igitur per obſervationes tempore T, quo pendulum ſimplex datae longitudinis D in certa terrae regione ſingulas oscillationes in exiguis arcubus perficiat, poterit eo ipſo inveniri altitudo g, per quam corpora gravia in eadem regione de quiete libere labentia intra primum minutum ſecundum debent decidere.

538. Corollarium 8.

Cognita autem altitudine g liberi lapſus corporum gravium intra primum minutum ſecundum pro quacunque terrae regione; invenietur $D = \frac{2gT^2}{\pi^2}$ (537. §.) longitudo penduli ſimplicis, quod in arcubus exiguis oscillans ſingulas oscillationes tempore T perficiet: et pro $T = 1$ fiet $D = \frac{2g}{\pi^2}$ longitudo penduli ſimplicis ſingulas oscillationes intra unum minutum ſecundum abſolventis.

539. Co-

539. Corollarium 9.

Si in omnibus terrae regionibus eadem ſit longitudo D penduli ſimplicis ſingulas oscillationes intra unum minutum ſecundum abſolventis; debebunt quoque corpora gravia de quiete libere labentia in omnibus terrae regionibus per eandem altitudinem $=g$ intra primum minutum ſecundum decidere: quodſi autem longitudines D, d pendulorum ſimplicium ſingulas oscillationes intra unum minutum ſecundum abſolventium diverſae ſint in diverſis terrae regionibus; erunt altitudines G, g, per quas corpora gravia de quiete in iisdem regionibus libere labentia primo minuto ſecundo decidant, inter ſe directe ut longitudines pendulorum, nimirum: $G = \frac{D\pi^2}{2}$, $g = \frac{d\pi^2}{2}$ (537. §.); hinc $G:g = D:d$.

540. Corollarium 10.

Vires gravitatis V, v in illis terrae regionibus, in quibus pendula ſimplicia ſingulas oscillationes uno minuto ſecundo abſolventia diverſas habent longitudines D, d ſunt itaque inter ſe directe ut hae longitudines: ſi enim corpora gravia in iisdem regionibus de quiete libere labentia per altitudines G, g primo minuto ſecundo decidant; erit $V:v = G:g$ (322. 312. §.) $= D:d$ (539. §.).

541. Corollarium 11.

Si duo pendula ſimplicia longitudinum D, d in eadem terrae regione ſub eadem elongatione φ a ſitu naturali temporibus T, t ſingulas oscillationes perficiant; erunt haec tempora inter ſe ut radices quadratae longitudinum; et ipſae longitudines inter ſe directe ut quadrata temporum: erit enim per (535. §.)

$$T = \pi S\sqrt{\frac{D}{2g}}, \text{ et } t = \pi S\sqrt{\frac{d}{2g}};$$

adeoque fiet

$$T:t = \sqrt{D}:\sqrt{d}; \text{ et } D:d = T^2:t^2.$$

542. Corollarium 12.

Quodſi autem pendula ſimplicia longitudinum D, d in arcubus prope evaneſcentibus oscillent; erunt tempora T, t, quibus illa ſingulas oscillationes abſolvent, ſemper inter ſe directe ut radices quadratae longitudinum

D, d, et hae ut quadrata temporum, etiam ſi diverſa ſit pendulorum elongatio (511. §.): ſemper enim erit per (538. §.)

$$D = \frac{2gT^2}{\pi^2}; \quad d = \frac{2gt^2}{\pi^2};$$

hinc $D:d = T^2:t^2$, et $T:t = \sqrt{D}:\sqrt{d}$.

543. Corollarium 13.

Pendulum longitudinis D ſingulas oſcillationes in arcu prope evaneſcente tempore T abſolvens, abſolvet quovis alio tempore Z oſcillationes numero $N = \frac{Z}{T} = \frac{Z}{\pi\sqrt{\frac{D}{2g}}}$ (536. §.).

544. Corollarium 14.

Quamobrem, ſi duo pendula ſimplicia longitudinum D, d ſingulas oſcillationes temporibus quibuscunque T, t abſolventia, in eadem terrae regione in arcubus prope evaneſcentibus oſcillent; erunt numeri N, n oſcillationum, quas illa eodem tempore Z debebunt perficere, inter ſe inverſe ut radices quadratae longitudinum: nimirum erit per (543. §.)

$$N = \frac{Z}{\pi\sqrt{\frac{D}{2g}}} \text{ et } n = \frac{Z}{\pi\sqrt{\frac{d}{2g}}};$$

adeoque $N:n = \sqrt{d}:\sqrt{D}$.

545. Problema.

Fig. 69. 93. *Datis longitudine* $l = EP$ (69. Fig.) *penduli ſimplicis et diſtantia* $D = aG$ *centri gravitatis* G *penduli compoſiti* a F D B E (93. Fig.) *ab axe ſuſpenſionis* n m, *invenire rationem temporum, quibus ejusmodi pendula ſub eadem elongatione* $\varphi = PED = GaC$ (69. 93. Fig.) *a ſitu naturali ſingulas oſcillationes abſolvant.*

Solutio.

1. Sit k linea recta, cujus quadratum k^2 aequetur momento inertiae penduli compoſiti a F D B E (93. Fig.) reſpectu axeos horizontalis tranſeuntis per illius centrum gravitatis G et paralleli axi oſcillationis n m diviſo per maſſam ejusdem penduli, et T ſit tempus unius integrae oſcillationis; erit per (528. §.)

 T =

$$T = \pi S \sqrt{\frac{k^2 + D^2}{2gD}} = \frac{\pi S}{\sqrt{2g}} \cdot \sqrt{\frac{k^2 + D^2}{D}}.$$

2. Si autem pendulum ſimplex (69. Fig.) $l = E$ tempore t ſingulas oscillationes abſolvat; erit per (535. §.)

$$t = \pi S \sqrt{\frac{D}{2g}} = \frac{\pi S}{\sqrt{2g}} \cdot \sqrt{l}.$$

Debebit ergo eſſe

$$T : t = \sqrt{\frac{k^2 + D^2}{D}} : \sqrt{l}, \text{ et } T^2 : t^2 = \frac{k^2 + D^2}{D} : l.$$

546. Corollarium 1.

Pro $l = D$ eſſet $T^2 : t^2 = (k^2 + l^2) : l^2$, conſequenter $T^2 > t^2$ et $T > t$ (545. §.); tempus ergo unius integrae oscillationis penduli compoſiti majus eſt tempore, intra quod pendulum ſimplex ſub eadem elongatione a ſitu naturali ſingulas oscillationes abſolveret, ſi illius longitudo aequaretur diſtantiae $D = aG$ centri gravitatis G penduli compoſiti ab axe oscillationis a.

547. Corollarium 2.

Semper autem, ſi penduli ſimplicis longitudo ſit $l = \frac{k^2 + D^2}{D}$, erit $T = t$ (545. §.), id eſt: pendulum compoſitum aFDBE (93. Fig.) et pendulum ſimplex EP (69. Fig.) abſolvent ſub pari elongatione $GaC = PED$ a ſitu naturali ſingulas oscillationes eodem tempore, ſi longitudo l penduli ſimplicis per diſtantiam D centri gravitatis penduli compoſiti ab axe ſuſpenſionis ita determinetur, ut ea ſit $l = \frac{k^2 + D^2}{D}$.

548. Definitio.

Pendula iſochrona ſunt, quae ſingulas oscillationes eodem tempore abſolvunt.

549. Corollarium 1.

Ut pendulum ſimplex longitudinis l ſub eadem elongatione a ſitu naturali, quam pendulum quodcunque compoſitum aFDBE (93. Fig.) habeat, ſit huic iſochronum, debet neceſſario eſſe $l = \frac{k^2 + D^2}{D} = \frac{k^2 + aG^2}{aG}$ (548. 547.).

550. Corollarium 2.

Cum igitur omne corpus grave FDBE unum centrum gravitatis G habeat (148. §.), per quod poteſt tranſire axis horizontalis parallelus axi oscillationis nm; adeoque in omni pendulo compoſito aFDBE poſſibilis debeat eſſe recta k (545. §. 1. n.), et alia D=aG: evidens eſt, pro quovis pendulo compoſito poſſibile eſſe pendulum ſimplex ei iſochronum (549. §.).

551. Corollarium 3.

Ob $l=aG+\frac{k^2}{aG}$ fit $l>aG$: longitudo penduli ſimplicis iſochroni pendulo compoſito aFDBE eſt ergo major diſtantia aG centri gravitatis G ab axe oscillationis nm (549. §.). Quare cogitetur in recta aG producta punctum z in diſtantia $az=\frac{k^2+D^2}{D}$, in quo tota maſſa gravis FDBE ſit collecta; erit az pendulum ſimplex iſochronum pendulo compoſito aFDBE (531. 549. §.).

552. Definitio.

Punctum z rectae aB tranſeuntis per centrum gravitatis G penduli compoſiti aFDBE, pro quo, ſi tota maſſa gravis corporis FDBE in illo collecta eſſet, naſci deberet pendulum ſimplex az compoſito aFDBE iſochronum, vocatur *Centrum oscillationis* penduli compoſiti aFDBE.

553. Corollarium 1.

In omni pendulo compoſito aFDBE datur in recta aB tranſeunte per illius centrum gravitatis G et perpendiculari ad axem oscillationis nm unum centrum oſcillationis z in diſtantia ab eodem axe $az=\frac{k^2+D^2}{D}$, quae ſemper eſt major quam diſtantia D=aG centri gravitatis G ab hoc axe (551. 552. §.).

554. Corollarium 2.

Diſtantia centri oscillationis z penduli compoſiti aFDBE excedit diſtantiam D=aG illius centri gravitatis G ab axe oscillationis nm differentia az—aG=az—D=Gz, eſtque (553. §.)

$$Gz=\frac{k^2+D^2}{D}-D=\frac{k^2}{D}.$$

555. Corollarium 3.

Inventio centri oscillationis z in dato quocunque pendulo compoſito aFDBE dependet igitur a calculo, quem ſuperius pro inveſtigando momento inertiae tradidimus. Si enim dato centro gravitatis G dataque illius diſtantia D=Ga ab axe ſuſpenſionis nm et maſſa P corporis FDBE, quaeras ejus momentum inertiae $\mu = Pk^2$ reſpectu axeos horizontalis tranſeuntis per centrum gravitatis G et paralleli axi nm; innoteſcet eo ipſo $k^2 = \frac{\mu}{P}$ (545. §. 1. n.), et diſtantia $Gz = \frac{k^2}{D} = \frac{\mu}{PD}$ centri oscillationis z a centro gravitatis G (554 §.).

556. Corollarium 4.

Dato autem momento inertiae $N = Pk^2 + PD^2$ penduli aFDBE reſpectu ipſius axeos oscillationis mn (519. §. 4. n.), datisque maſſa P penduli et diſtantia D=Ga illius centri gravitatis G ab axe oscillationis nm; invenies diſtantiam $az = \frac{N}{P.D}$ centri oscillationis z ab axe oscillationis nm (553. §.) diviſione momenti inertiae N per productum ex pondere penduli in diſtantiam centri gravitatis ab axe oscillationis.

557. Corollarium 5.

Exemplo ſit cylinder rectus (78. Fig.) circa axem cum diametro AB coincidentem oscillans. Cum axis cylindri ch ſit perpendicularis ad axem oscillationis nm, tranſeatque per centrum gravitatis u, ita ut ſit $uc = \frac{1}{2}ch$ (219. §.); jacebit centrum oscillationis cylindri in ipſo axe ch, puta in ejus puncto z (552. §.): ſi igitur, pro radio cylindri R=Ac, axe a=ch, et maſſa ſeu pondere P, capiatur diſtantia $D = uc = \frac{1}{2}a$ centri gravitatis u ab axe oscillationis, et momentum inertiae $N = \frac{1}{12}P(4a^2 + 3R^2)$ totius cylindri reſpectu axeos AB (435. §.); erit diſtantia centri oscillationis z ab hoc axe per (556. §) Fig. 78.

$$cz = \frac{\frac{1}{12}P(4a^2 + 3R^2)}{P.\frac{1}{2}a} = \frac{2}{3}a + \frac{R^2}{2a}.$$

558. Corollarium 6.

Si conus rectus ABD (56. Fig.) oscillet circa axem MN ad illius axem AC=a perpendicularem; jacebit in AC centrum gravitatis γ in diſtantia $D = A\gamma = \frac{3}{4}a$ (223. §.), et centrum oscillationis (552. §.) alicubi Fig. 56.

 intra

intra centrum gravitatis γ et baſeos centrum C (553. §.), cujus diſtantia X ab axe oſcillationis MN, adeoque a vertice coni A, denotante P pondus, et N momentum inertiae coni reſpectu axeos MN, erit per (556. §.)

$$X = \frac{N}{P.D} = \frac{N}{P.\frac{3}{4}a}.$$

Eſt autem per (436. §.)

$$N = \tfrac{3}{20}P(4a^2 + R^2) = P(\tfrac{3}{5}a^2 + \tfrac{3}{20}R^2):$$

igitur debet eſſe

$$X = \frac{\frac{3}{5}a^2 + \frac{3}{20}R^2}{\frac{3}{4}a} = \tfrac{4}{5}a + \frac{R^2}{5a}.$$

559. Corollarium 7.

Fig. 59. Oscillet conoides parabolicum pQq (59. Fig.) circa axem MN ejus axi Qa perpendicularem: cum illius centrum gravitatis γ jaceat in axe Qa, ita ut ejus diſtantia a vertice Q ſit $D = Q\gamma = \frac{2}{3}Qa$ (233. §.); jacebit centrum oſcillationis in eodem axe, puta in puncto α (552. 553. §.), ita ut illius diſtantia a puncto Q, pro axe conoidis $a = Qa$, pondere P, et momento inertiae N reſpectu axeos MN, debeat eſſe (556. §.)

$$Q\alpha = \frac{N}{P.D} = \frac{N}{P.\frac{2}{3}a}.$$

Sed pro $x = Qa = a$, et parametro p parabolae Qp, cujus revolutione circa axem Qa generatur conoides pQq debet eſſe (439. §.)

$$N = \tfrac{1}{6}P(3a^2 + p^2) = P(\tfrac{1}{2}a^2 + \tfrac{1}{6}p^2):$$

debet ergo poni

$$Q\alpha = \frac{\frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{6}p^2}{\frac{2}{3}a} = \tfrac{3}{4}a + \frac{p^2}{4a}.$$

560. Corollarium 8.

Et generatim, quidquid ſit curva Qp debita coordinatis orthogonis $y = pa$, $x = Qa$, cujus revolutione circa axem Qa generetur corpus rotundum pQq oſcillans circa axem MN axi Qa perpendicularem, jacebit et centrum gravitatis corporis pQq in axe Qa (225. §.), et ipſum centrum oſcillationis, puta in puncto α (552. §.), pro cujus diſtantia $Q\alpha$ ab axe oſcillationis MN facile ex praecedentibus derivabitur expreſſio generalis.

Si

Si enim N denotet momentum inertiae corporis pQq reſpectu axeos mn, et n exprimat productum ex pondere corporis pQq in diſtantiam illius centri gravitatis, ab axe MN aequale momento ſtatico ejusdem corporis reſpectu plani in Q ad Qα perpendicularis (150. §.);

$$\text{erit } Q\alpha = \frac{N}{n} \text{ per (556. §.);}$$

$$N = \frac{\pi}{4}\int(4x^2y^2+y^4)\partial x \text{ per (437. §.);}$$

$$n = \pi\int xy^2\partial x \text{ per (226. §.):}$$

igitur erit

$$Q\alpha = \frac{\frac{\pi}{4}\int(4x^2y^2+y^4)\partial x}{\pi\int xy^2\partial x} = \tfrac{1}{4}\cdot\frac{\int(4x^2y^2+y^4)\partial x}{\int xy^2\partial x}.$$

561. Problema.

Inveſtigare centrum oscillationis penduli egihPDQi (77. Fig.) *compoſiti ex duabus partibus* egih, BPDQ, *quarum centra gravitatis* γ, C *jaceant in una recta* AD *ad axem oscillationis* mn *perpendiculari.* Fig. 77.

Solutio.

1. Commune centrum gravitatis partium egih, BPDQ, adeoque centrum gravitatis ipſius penduli egih PDQ coincidet in hac hypotheſi cum puncto α rectae AD intra centra gravitatis C, γ ita jacente, ut pro maſſis ſeu ponderibus m, M partium egih, BPDQ, ſit (154. §.).

$$A\alpha = \frac{m.A\gamma + M.AC}{m+M}.$$

2. Quodſi jam m', M' ſint momenta inertiae partium egih, BPDQ penduli reſpectu axeos oscillationis mn; erit m'+M' momentum inertiae totius penduli reſpectu ejusdem axeos (399 §.): quare, cum illius centrum oscillationis cum aliquo puncto z rectae AD debeat coincidere (552. 553. §.), et m+M ſit maſſa, Aα vero diſtantia centri gravitatis penduli ab axe mn; erit diſtantia centri oscillationis ab eodem axe per (556. §.)

$$Az = \frac{m'+M'}{A\alpha(m+M)} = \frac{m'+M'}{m.A\gamma+M.AC}.$$

3. De-

3. Determinatis ergo ponderibus m, M partium egih, BPDQ penduli, inventisque diſtantiis $A\gamma$, AC centrorum gravitatis γ, C earundem partium ab axe oscillationis mn, quaerantur momenta inertiae m^1, M^1 illarum reſpectu hujus axeos: ſi enim ſummam horum momentorum dividas per ſummam productorum ex ponderibus m, M in diſtantias reſpectivorum centrorum gravitatis γ, C ab axe mn; dabit quotus diſtantiam centri oscillationis z ab eodem axe.

562. Corollarium 1.

Fig. 76. Sit datum pendulum compoſitum ex virga parallelepipeda AB (76. Fig.) longitudinis l craſſitiei vero adeó parvae, ut illa reſpectu longitudinis evaneſcat, et ex globo BPDQ radii R = PC; erit in (561. §.)

$$A\gamma = \tfrac{1}{2}l;\ AC = l + R\ (217.\ 231.\ \S.);$$

$$m^1 = \tfrac{1}{3} m l^2 \text{ per } (449.\ \S.);$$

$$M^1 = \tfrac{1}{5} M(7R^2 + 10Rl + 5l^2) \text{ per } (428.\ \S.):$$

pro ponderibus m, M virgae AB et globi BPDQ erit, ergo diſtantia centri oscillationis z penduli ABPDQ ab axe oscillationis mn

$$Az = \frac{m^1 + M^1}{m.A\gamma + M.AC} = \frac{\tfrac{1}{3} m l^2 + \tfrac{1}{5} M(7R^2 + 10Rl + 5l^2)}{m.\tfrac{1}{2}l + M(l+R)};$$

$$\text{id eſt } Az = \frac{m.\tfrac{1}{3}l^2 + M(\tfrac{7}{5}R^2 + 2Rl + l^2)}{m.\tfrac{1}{2}l + M(l+R)}.$$

563. Corollarium 2.

Si autem etiam pondus m virgae AB ſit tam parvum, ut illud reſpectu ponderis M globi BPDQ evaneſcat; poterit diſtantia centri oscillationis z penduli ABPDQ ab axe oscillationis mn poni (562. §.)

$$Az = \frac{l^2 + 2Rl + \tfrac{7}{5}R^2}{l+R} = l + R + \frac{2R^2}{5(l+R)}.$$

564. Corollarium. 3.

Fig. 77. Sit pars una egih penduli (77. Fig.) virga cylindrica longitudinis l = AB, et radii r; pars altera BPDQ ſit lens compoſita ex ſegmentis aequalibus BPD, BQD ſphaerae radii R, cujus axes ſint PQ = 2b, BD = 2a; erit in (561. §.)

Aγ

$A\gamma = \frac{1}{2}l$; $AC = l + a$;

$m' = \frac{1}{12} m (4l^2 + 3r^2)$ per (435. §.);

$$M' = \frac{1}{10} M \left(10(l+a)^2 + \frac{10a^4 + 5a^2b^2 + b^4}{3a^2 + b^2} \right) \text{ (430. §):}$$

pro ponderibus m, M ergo virgae cylindricae egih, et lentis BPDQ erit diſtantia centri oſcillationis z penduli egihPDQ ab axe oſcillationis mn

$$Az = \frac{m(\frac{1}{3}l^2 + \frac{1}{4}r^2) + M\left((l+a)^2 + \frac{a^4 + \frac{1}{2}a^2b^2 + \frac{1}{10}b^4}{3a^2 + b^2}\right)}{m \cdot \frac{1}{2}l + M(l+a)}.$$

565. Corollarium 4.

Quodſi autem pondus m virgae cylindricae egih evaneſcat reſpectu ponderis M lentis BPDQ; erit prope vera diſtantia centri oſcillationis z ab axe oſcillationis mn in (564. §.)

$$Az = l + a + \frac{a^4 + \frac{1}{2}a^2b^2 + \frac{1}{10}b^4}{(3a^2 + b^2)(l+a)}.$$

566. Corollarium 5.

Segmenta ſphaerica BPD, BQD abibunt in duos ſemiglobos aequales globum BPDQ conſtituentes, ſi axes lentis BD, PQ inter ſe aequentur: pro $a = b = R$ debebit ergo ex (565. §.) prodire formula, quam jam in (563. §.) invenimus.

567. Corollarium 6.

Pari ratione poteſt determinari diſtantia Az centri oſcillationis z penduli egihPDQ ab axe oſcillationis mn, ſi pars una egih ſit virga cylindrica longitudinis $l = AB$, et radii r, pars altera autem BPDQ lens compoſita ex aequalibus ſegmentis BPD, BQD ſphaeroidis elliptici revolutione ellipſeos circa axem conjugatum geniti, cujus axes ſint $PQ = 2e$, $BD = 2c$, pro ellipſeos axe conjugato b et tranſverſo a. Pro centris gravitatis γ, C virgae et lentis, maſſis illarum m, M, et momentis inertiae m', M' reſpectu axeos mn, debebit enim eſſe

$A\gamma = \frac{1}{2}l$; $AC - l + c$;

$m' = \frac{1}{12} m (4l^2 + 3r^2)$ per (439. §.).

Porro pro $x=e$ invenies per (426. §.) momentum inertiae ſegmenti BPD reſpectu axeos PC, cujus duplum dabit momentum inertiae totius lentis BPDQ reſpectu axeos PQ (399. §.), unde additione producti $M . AC^2 = M(l+c)^2$ reperietur momentum inertiae lentis reſpectu axeos oſcillationis mn (406. §.), nimirum

$$M' = M\left((l+c)^2 + \frac{a^2(10eb^2 - 15be^2 + 6e^3)}{10b^2(3b-2e)}\right).$$

Hinc per (561. §.) fiet

$$Az = \frac{m(\frac{1}{3}l^2 + \frac{1}{4}r^2) + M\left((l+c)^2 + \frac{a^2(eb^2 - \frac{3}{2}be^2 + \frac{3}{5}e^3)}{b^2(3b-2e)}\right)}{m . \frac{1}{2}l + M(l+c)}.$$

568. Corollarium 7.

Pro $2e = PQ = b$, $2c = BD = a$ abibit lens BPDQ in ſphaeroidem ellipticum revolutione ellipſeos circa axem conjugatum PQ genitum, pro quo caſu erit itaque diſtantia centri oscillationis z ab axe oscillationis mn in (567. §.)

$$Az = \frac{m(\frac{1}{3}l^2 + \frac{1}{4}r^2) + M(l^2 + al + \frac{7}{20}a^2)}{m . \frac{1}{2}l + M(l + \frac{1}{2}a)}.$$

569. Corollarium 8.

Si vero pondus m virgae cylindricae egih reſpectu ponderis M lentis vel integri ſphaeroidis elliptici BPDQ in (567. 568. §.) evaneſcat; erit

$$Az = l + c + \frac{a^2(eb^2 - \frac{3}{2}be^2 + \frac{3}{5}e^3)}{b^2(3b-2e)(l+c)} \text{ in (567. §.);}$$

$$Az = l + \frac{1}{2}a + \frac{1}{10} . \frac{a^2}{l + \frac{1}{2}a} \text{ in (568. §.).}$$

570. Problema.

Fig. 77. *Si pendulum compoſitum ſit ex virga tenuiſſima parallelepipeda vel cylindrica* egih, *et cono truncato* BPQ, *qui baſi minore in* B *ita ſit ei virgae annexus, ut illius axis* BC *cum virgae axe* AB *in eadem recta* AC *jaceat; invenire centrum oscillationis* (77. Fig.).

Solutio.

Solutio.

1. Sit m pondus, l longitudo, et γ centrum gravitatis virgae egih, cum craſſities illius evaneſcat reſpectu longitudinis, ſeu parallelepipeda illa ſit, ſeu cylindrica, per hypotheſim; poterit utroque caſu illius momentum inertiae reſpectu axeos mn poni $= \frac{1}{3} m l^2 = m^1$ (449. 435 §§.); diſtantia autem centri gravitatis γ ab axe oſcillationis erit $A\gamma = \frac{1}{2} l$.

2. Porro ſit axis coni truncati $BC = a$ et in hoc illius centrum gravitatis α, cujus diſtantia a puncto B, pro radio r baſeos minoris in B, et radio R baſeos majoris in PQ, erit per (224. §.) $B\alpha = \frac{1}{4} a . \frac{3R^4 + r^4 - 4rR^3}{(R^3 - r^3)(R - r)}$. Hinc, ſi M ſit maſſa ejusdem coni, et M^1 momentum inertiae reſpectu axeos oſcillationis mn, fiet ob (1) per (561. §.) diſtantia centri oſcillationis z ab axe oſcillationis

$$Az = \frac{m . \frac{1}{3} l^2 + M^1}{m . \frac{1}{2} l + M\left(\frac{1}{4} a \frac{3R^4 + r^4 - 4rR^3}{(R^3 - r^3)(R - r)} + l\right)}.$$

3. Inveniendum ſit jam in (57. Fig.) momentum inertiae μ coni truncati bdDB = M reſpectu diametri BD baſeos majoris, pro illius axe $Cc = x$, et radiis $CD = R$, $cd = r$: ſi k denotet illius momentum inertiae reſpectu plani BMDNB, et Z reſpectu axeos Cc; erit per (434. §.) Fig. 57.

$$\mu = k + \frac{1}{2} Z.$$

Verum pro angulo $dDC = \varphi$ erit $r = cd = R - D\delta = R - x \,\mathrm{Cot}\,\varphi$: igitur fiet

$$M = \frac{1}{3}\pi(3R^2 x - 3Rx^2 \,\mathrm{Cot}\,\varphi + x^3 \,\mathrm{Cot}\,\varphi^2);$$

hinc per (431. §.)

$$\partial k = x^2 \partial M = \frac{1}{3}\pi(3R^2x^2 - 6Rx^3 \,\mathrm{Cot}\,\varphi + 3x^4 \,\mathrm{Cot}\,\varphi^2)\partial x;$$

$$\text{et } k = \frac{\pi x^3}{3}(R^2 - \tfrac{3}{2} R x \,\mathrm{Cot}\,\varphi + \tfrac{3}{5} x^2 \,\mathrm{Cot}\,\varphi^2) =$$

$$= \frac{\pi x^3}{30}(R^2 + 3Rr + 6r^2);$$

$$\text{ſeu } k = \tfrac{1}{10} M x^2 \frac{(R^2 + 3Rr + 6r^2)(R - r)}{R^3 - r^3}.$$

Et per (417. §.) eſt

$$\tfrac{1}{2} Z = \tfrac{3}{20} M \frac{R^5 - r^5}{R^3 - r^3}.$$

His itaque valoribus loco k et $\frac{1}{2}Z$ in aequatione pro μ ſubſtitutis inveniemus

$$\mu = \tfrac{1}{20} M \frac{3(R^5 - r^5) + 2x^2 R^2 (R + 2r) + 6x^2 r^2 (R - 2r)}{R^3 - r^3}.$$

Fig. 77. 4. Differentia quadratorum diſtantiarum $A\alpha$, αC centri gravitatis α coni truncati BPQ (77. Fig.) ab axibus parallelis mn, PQ eſt

$$A\alpha^2 - C\alpha^2 = (l + B\alpha)^2 - (a - B\alpha)^2 = l^2 - a^2 + 2(l + a)B\alpha =$$

$$= l^2 - a^2 + \tfrac{1}{2} a(l + a) \frac{3R^4 + r^4 - 4rR^3}{(R^3 - r^3)(R - r)} \text{ ob } (2).$$

5. Quare pro $x = a = BC$ dabit μ in (3) momentum inertiae coni truncati BPQ reſpectu axeos PQ coincidentis cum diametro illius baſeos majoris; et ſi eidem momento addas productum ex maſſa ſeu pondere coni M in differentiam $A\alpha^2 - C\alpha^2$ juxta (4) determinatam, obtinebis momentum inertiae M^1 ejusdem coni reſpectu axeos oscillationis mn (409. §.): hoc ergo valore loco M^1 in (2) ſubſtituto inveniemus ſequentem expreſſionem diſtantiae centri oscillationis ab axe oscillationis:

$$Az = \frac{1}{m\tfrac{1}{2}l + M\left(l + a\frac{\tfrac{3}{4}R^4 + \tfrac{1}{4}r^4 - rR^3}{(R^3 - r^3)(R - r)}\right)}\Bigg[m.\ l^2$$

$$+ M\left(\frac{\tfrac{3}{20}(R^5 - r^5) + \tfrac{1}{10}a^2 R^2 (R + 2r) + \tfrac{3}{10}a^2 r^2 (R - 2r)}{R^3 - r^3}\right.$$

$$\left. + l^2 - a^2 + a(l + a)\frac{\tfrac{3}{2}R^4 + \tfrac{1}{2}r^4 - 2rR^3}{(R^3 - r^3)(R - r)}\right)\Bigg].$$

571. Corollarium 1.

Conus truncatus BPQ, ſi radius r baſeos minoris in B evaneſcat, abibit in conum integrum axeos $a = BC$: pro $r = 0$ obtinebimus ergo ex (570. §.) ſequentem formulam pro diſtantia centri oscillationis z ab axe oscillationis mn, ſi una pars egih penduli ſit virga tenuiſſima longitudinis l et ponderis m; pars altera BPQ autem conus rectus axeos $a = BC$, radii R baſeos in PQ, et ponderis M.

$$Az = \frac{m.\tfrac{1}{3}l^2 + M\left(\tfrac{3}{20}R^2 + \tfrac{3}{5}a^2 + l\left(l - \tfrac{3}{2}a\right)\right)}{m.\tfrac{1}{2}l + M\left(\tfrac{3}{4}a + l\right)}.$$

572. Co-

572. Corollarium 2.

Si petatur diſtantia Az centri oſcillationis z ab axe oſcillationis mn pro pendulo ex virga tenuiſſima $egih$ et corpore $BPDQ$ compoſito, quod conſtet e duobus conis truncatis aequalibus BPQ, DPQ baſium majorum in PQ congruentium; erit, ut in (570. §. 1. n.) $A\gamma = \frac{1}{2}l$, $m^{1} = m\frac{1}{3}l^{2}$ pro longitudine l, et pondere m virgae $egih$: quodſi ergo $BD = 2a$ ſit axis corporis $BPDQ$, in cujus medio puncto C jacet ejus centrum gravitatis, M vero denotet illius pondus, et M^{1} momentum inertiae reſpectu axeos oſcillationis mn; erit per (561. §.)

$$Az = \frac{m\frac{1}{3}l^{2} + M^{1}}{m.\frac{1}{2}l + M(l+a)}.$$

Si jam R ſit communis radius baſium majorum in PQ, et r radius minorum baſium in B, D utriusque coni truncati BPQ, DPQ; invenies momentum inertiae utriusque coni ſeorſim reſpectu diametri in PQ, ſi in (570. §. 3. n.) ponas $x = a$, et $\frac{1}{2}M$ loco M, cujus duplum dabit momentum inertiae totius corporis $BPDQ$ reſpectu diametri PQ parallelae axi oſcillationis mn, unde additione producti $M.AC^{2} = M(l+a)^{2}$ obtinebitur momentum inertiae M^{1} ejusdem corporis reſpectu axeos oſcillationis mn (406. §.). Hoc ergo valore ſumto pro M^{1} in praecedente formula inveniemus

$$Az = \frac{1}{m\frac{1}{2}l + M(l+a)}\Big[m\frac{1}{3}l^{2} + M\Big((l+a)^{2} + \frac{3(R^{5}-r^{5}) + 2a^{2}R^{2}(R+2r) + 6a^{2}r^{2}(R-2r)}{20(R^{3}-r^{3})}\Big)\Big].$$

573. Corollarium 3.

Pro $r = 0$ abibit corpus $BPDQ$ compoſitum ex duobus conis truncatis aequalibus BPQ, DPQ in corpus conſtans ex duobus conis integris aequalibus axium $BC = CD = a$, et communis radii R baſium in PQ congruentium: pro $r = 0$ inveniemus ergo ex (572. §.) diſtantiam centri oſcillationis z ab axe oſcillationis mn pro pendulo ex ejusmodi corpore $BPDQ$ et virga tenuiſſima $egih$ compoſito, nimirum

$$Az = \frac{m\frac{1}{3}l^{2} + M\big(\frac{1}{20}(3R^{2} + 2a^{2}) + (l+a)^{2}\big)}{m\frac{1}{2}l + M(l+a)}.$$

574. Corollarium 4.

Si cono truncato BPQ in (570. §.) ſubſtituas cylindrum axeos $a = BC$, et radii R, cum illius centrum gravitatis α coincidat cum medio puncto axeos BC (219. §.); erit $A\alpha = l + \frac{1}{2}a$, hinc ob (570. §. 1. n.) per (561. §.)

$$Az = \frac{m \cdot \frac{1}{3} l^2 + M^I}{m \cdot \frac{1}{2} l + M(l + \frac{1}{2}a)}.$$

Cum autem momentum inertiae cylindri BPQ reſpectu diametri PQ illius baſeos ſit $\frac{1}{12} M (4a^2 + 3R^2)$ per (435. §.); erit $M^I = \frac{1}{12} M (4a^2 + 3R^2) + M(A\alpha^2 - \alpha C^2)$, ſeu

$$M^I = M(\tfrac{1}{3}a^2 + \tfrac{1}{4}R^2 + (l + \tfrac{1}{2}a)^2 - (\tfrac{1}{2}a)^2)$$
$$= M(\tfrac{1}{3}a^2 + \tfrac{1}{4}R^2 + l(l + a))$$

momentum inertiae ejusdem cylindri reſpectu axeos oscillationis mn (409. §.): quare, ſi hunc valorem loco M^I in praecedenti formula ſubſtituas, invenies diſtantiam centri oscillationis z ab axe oscillationis mn pro pendulo ex virga tenuiſſima egih longitudinis l et ponderis m, et cylindro BPQ axeos $a = BC$, radii R et ponderis M compoſito, nimirum

$$Az = \frac{m \frac{1}{3} l^2 + M(\frac{1}{3}a^2 + \frac{1}{4}R^2 + l(l + a))}{m \frac{1}{2} l + M(l + \frac{1}{2}a)}.$$

575. Problema.

Dato numero N oscillationum, quas pendulum compoſitum ſub elongatione Φ a ſitu naturali intra certum tempus T abſolvat, invenire longitudinem L penduli ſimplicis ſub eadem elongatione Φ, vel in quocunque arcu exiguo ad ſingula minuta ſecunda oscillantis.

Solutio.

1. Si pendulum compoſitum intra T minuta ſecunda oscillationes numero N abſolvat; debebit illud ſingulas oscillationes intra tempus $\frac{T}{N}$ abſolvere.

2. Quodſi ergo D ſit diſtantia centri oscillationis dati penduli compoſiti ab axe oscillationis; erit D longitudo penduli ſimplicis dato compoſito

poſito iſochroni, quod idcirco ſub elongatione φ a ſitu naturali quamvis oscillationem intra tempus $= \frac{T}{N}$ perficiet ob (1) per (552. 548. §.) Adeoque, denotante L longitudinem penduli ſimplicis ſub pari elongatione a ſitu naturali ad ſingula minuta ſecunda oscillantis, debebit eſſe per (541. §.)

$$L:D = 1^2 : \frac{T^2}{N^2};\ \text{hinc}\ L = D\frac{N^2}{T^2}.$$

3. Porro pro cognita elongatione φ penduli ſimplicis a ſitu naturali, quod longitudinem D habeat, et tempore $= \frac{T}{N}$ ſingulas oscillationes perficiat (2), debebit eſſe per (535. §.) proxime

$$\frac{T}{N} = \pi\left(1+\frac{b}{8D}\right)\sqrt{\frac{D}{2g}}:\ \text{igitur}$$

$$\pi\sqrt{\frac{D}{2g}} = \frac{T}{N\left(1+\frac{b}{8D}\right)}\ \text{pro}\ b = D\,\text{Sin v}\,\varphi.$$

Hinc autem, quia $\pi\sqrt{\frac{D}{2g}}$ eſt tempus, intra quod pendulum ſimplex longitudinis D ſingulas oscillationes in quocunque arcu exiguo debet abſolvere (536. §.); fiet pro longitudine L penduli ſimplicis in quibuslibet arcubus exiguis ad ſingula minuta ſecunda oscillantis, per (541. §.)

$$L:D = 1^2 : \frac{T^2}{N^2\left(1+\frac{b}{8D}\right)^2};\ \text{hinc}\ L = D\frac{N^2\left(1+\frac{b}{8D}\right)^2}{T^2};$$

$$\text{ſeu}\ L = \frac{N^2(b+8D)^2}{64DT^2}.$$

576. Corollarium 1.

Quamobrem, ſi determinanda ſit in quapiam terrae regione longitudo L penduli ſimplicis, quod in arcubus exiguis oscillans ſingulas oscillationes minutis ſecundis perficiat, ſumatur tale pendulum compoſitum, pro quo diſtantiam D centri oscillationis ab axe oscillationis calculo definire liceat; tum obſervetur ope exquiſiti chronometri tempus T in mi-

nutis ſecundis, intra quod illud ſub determinata elongatione φ a ſitu naturali determinatum aliquem numerum N oſcillationum abſolvat: per haec enim reperietur quaeſita longitudo

$$L = \frac{N^2 (b + 8D)^2}{64 D T^2} \text{ ob (575. §).}$$

Ubi autem elongatio φ penduli compoſiti a ſitu naturali valde parva fuerit, ita ut $b = D \operatorname{Sin} v \varphi$ reſpectu $8D$ fere evaneſcat; poterit poni

$$L = \frac{N^2 (8D)^2}{64 D T^2} = D \frac{N^2}{T^2}.$$

Exemplum.

Clar. Liesganig factis peculiari diligentia obſervationibus comperit, pendulum ex filo tenuiſſimo AB (77. Fig.) et duplicato cono truncato BPDQ compoſitum, quale in (572. §.) conſideravimus, Viennae 87861 oſcillationes $= N$ intra 86409,4 minuta ſecunda $= n$ abſolviſſe. Erat autem, omnibus dimenſionibus ad menſuras vienneuſes relatis, longitudo fili, $l = AB = 431,941$ lin.; pondus fili, $m = \frac{1}{3}$ gran.; ſemiaxis corporis BPDQ, $a = BC = 5,922$ lin.; radius communis baſium majorum conorum truncatorum BPQ, DPQ in PQ cohaerentium, $R = PC = 4,26$ lin.; radius communis baſium minorum in B, D, $r = 2,28$ lin.; et pondus totius corporis BPDQ, $M = 540$ gran.

Quare, ſi hos valores in (572. §.) ſubſtituas, invenies diſtantiam $D = Az$ centri oſcillationis z ab axe oſcillationis mn aequalem longitudini penduli ſimplicis pendulo compoſito *Liesganigiano* iſochroni, nimirum $D = 437,903$ lin. Hinc autem determinabis porro longitudinem L penduli ſimplicis ſub pari elongatione a ſitu naturali ad ſingula minuta ſecunda oſcillantis, nimirum

$$L = 437,903 \frac{(87861)^2}{(86409,4)^2},$$

Id eſt $L = 452,739$ lin. vienn. $= 440,562$ lin. pariſ.

577. Corollarium 2.

Inventa ope penduli compoſiti longitudine L penduli ſimplicis in arcubus exiguis ad ſingula minuta ſecunda oſcillantis (576. §.), poteſt eo ipſo

etiam

etiam altitudo g determinari, per quam corpora gravia de quiete libere labentia intra primum minutum ſecundum decidunt, ob $g = \frac{1}{2}\pi^2 L$ per (537. §.).

Exemplum.

In (576. §.) invenimus $L = 440,562$ lin. pariſ. pro longitudine penduli ſimplicis ad ſingula minuta ſecunda oſcillantis: aſſumta ergo ratione radii ad ſemiperipheriam $1 : \pi = 1 : 3,1415$ etc., quo fiat $\pi = 3,1415$ etc. erit

$$g = \tfrac{1}{2}\pi^2 . 440,562 = \pi^2 . 220,281.$$

Quia vero eſt pes rhenanus ad pariſinum $= 13913 : 14400$, ſi g ad pedem rhenanum referatur; debebit eſſe

$$13913 : 14400 = \pi^2 . 220,281 : g$$

$$\text{hinc } g = \frac{\pi^2 . 220,281 . 14400}{13913};$$

et adhibitis logarithmis fiet

$$\log g = S - \log 13913$$

$$\text{pro } S = 2 \log \pi + \log 220,281 + \log 14400.$$

Iam autem eſt

$$\begin{aligned}
\log \pi &= 0,4971499 \\
2 \log \pi &= 0,9942998 \\
\log 220,281 &= 2,3429771 \\
\log 14400 &= 4,1583625 \\
\hline
\text{igitur } S &= 7,4956394 \\
\text{Porro } \log 13913 &= 4,1434208 \\
\hline
\text{igitur } \log g &= 3,3522186
\end{aligned}$$

Quare, cum huic logarithmo proxime reſpondeat numerus 2250,187; debet poni $g = 2250,187$ lin. rhen. $= 15,6262$ ped. rhen., qui numerus ab illo, quem in (323. §.) calculi gratia propoſuimus, $\frac{12}{10000}$ pedis rhenani differt.

578. Corollarium 3.

Obſervationes enim a diverſis Academicis in variis terrae regionibus ope pendulorum compoſitorum factae evicerunt, haud eandem eſſe ubique

LIPSIAE

EX TYPOGRAPHIA DÜRRIA.

Fig. 3.

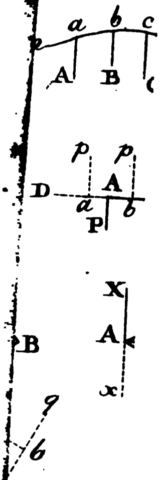
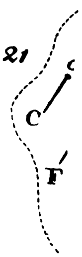
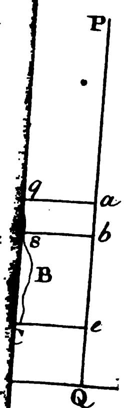
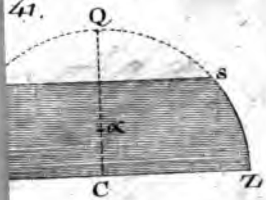


Fig: 21





41.



Fi



9

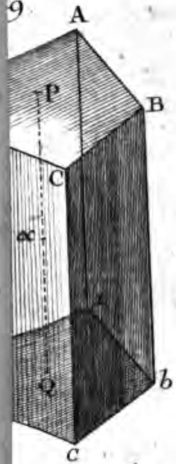
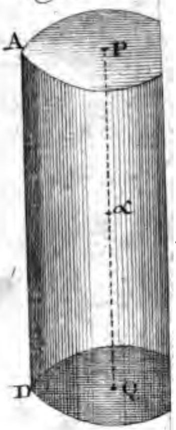
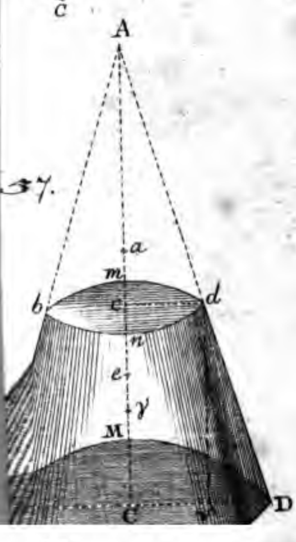


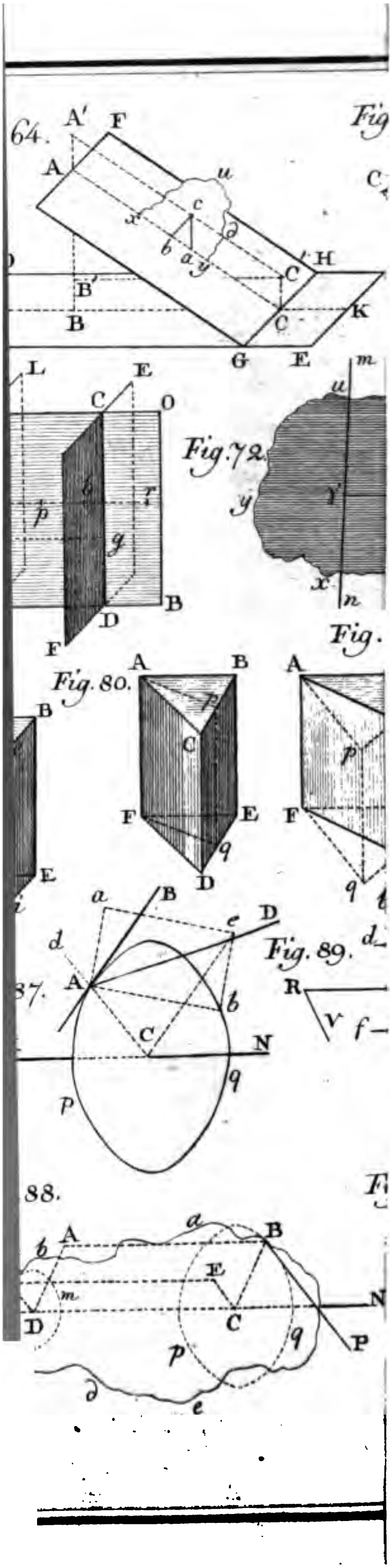
Fig. 50.



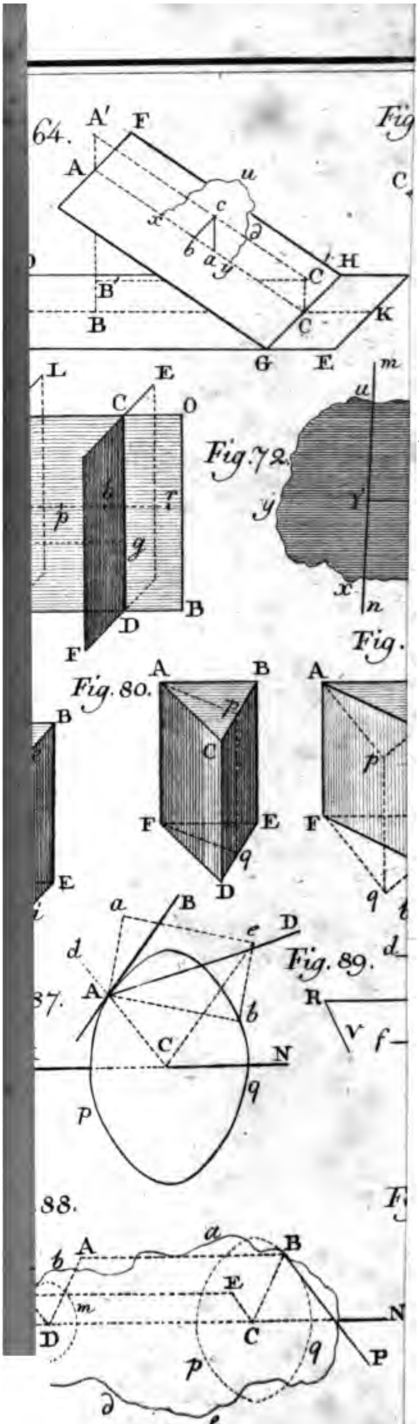
37.







64.
Fig.72.
Fig. 80.
Fig. 89.
87.
88.


64.
Fig. 72.
Fig. 80.
87.
Fig. 89.
88.

FEB [illegible] 1924